

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Сибирский государственный медицинский университет»
Министерства здравоохранения Российской Федерации

Сибирское отделение Российской академии наук
Институт оптики атмосферы
Научно-образовательный центр
«Лазерные технологии в медицинской диагностике»

Ю.В. Кистенев, А.В. Шаповалов

**Интегральный критерий
на основе оценки самоподобия**

учебное пособие
2-е издание, исправленное

Томск
Издательство СибГМУ
2017

УДК 53.082.52(075.8)
ББК 22.3я73
К 448

Составители:
Ю.В. Кистенев, А.В. Шаповалов

К 448 Кистенев, Ю. В. Интегральный критерий на основе оценки самоподобия: учебное пособие / сост. Ю. В. Кистенев, А. В. Шаповалов. – 2-е изд., исправл. – Томск: Изд-во СибГМУ, 2017. – 23 с.

В учебном пособии представлены материалы по современным физико-математическим методам представления и анализу многомерных медико-биологических данных, основанных на учете нелинейности свойств и взаимодействий характеризующих биосистемы.

Книга предназначена для аспирантов и студентов медико-технических и медико-биологических специальностей, а также для всех интересующихся современными математическими подходами к анализу биомедицинских данных.

УДК 53.082.52(075.8)
ББК 22.3я73

*Утверждено и рекомендовано к печати учебно-методической комиссией
ФГБОУ ВПО СибГМУ Минздрава России (протокол № 3 от 26 сентября 2017 г).*

© Кистенев Ю.В., Шаповалов А.В., 2017
© Издательство СибГМУ, 2017

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	4
1. Нестационарность физиологических данных	5
2. Самоподобие и размерность подобия	8
2.1. Самоподобные объекты	8
2.2. Размерность подобия	7
3. Клеточная размерность	12
3.1. Понятие клеточной размерности	12
3.2. Практическое вычисление клеточной размерности	13
4. Фрактальный анализ физиологических данных	15
5. Понятие лакунарности	17
Контрольные вопросы	21
Использованная литература	22

ВВЕДЕНИЕ

Одной из актуальных задач в области биомедицины является классификация состояния биообъекта на основе разнородных экспериментальных биомедицинских данных. В этих условиях необходимо привлечение методов, позволяющих выявить в многомерных массивах данных скрытые закономерности, уменьшить размерность исходного пространства признаков, выявить наиболее информативные признаки. Одними из наиболее привлекательных в этой области являются методы анализа данных, базирующиеся на учете нелинейности свойств биообъектов.

В пособии рассматривается одно из направлений интегральной оценки биомедицинских данных, основанное на анализе их свойств самоподобия.

1. НЕСТАЦИОНАРНОСТЬ ФИЗИОЛОГИЧЕСКИХ ДАННЫХ

Традиционные методы статистического анализа базируются на неизменности статистических свойств изучаемого процесса. Такие процессы называют стационарными. Для физиологических сигналов это условие, как правило, не выполняется в силу влияния внешних факторов на организм, комплексных взаимодействий гемодинамических, электрофизиологических, гуморальных факторов, а также влияния центральной и автономной вегетативных нервных систем.

Нестационарность физиологического процесса влечет за собой изменение статистических свойств физиологических данных с течением времени и, следовательно, неадекватность описания их свойств в терминах статистических характеристик.

На рис. 1. представлены записи изменения частоты сердечных сокращений со временем для пациентов в норме и с патологией (Stanley H.E. et al., 1999). Эти сигналы имеют видимые существенные различия, однако их основные статистические параметры (среднее значение и дисперсия) практически совпадают.

Кроме того, и частотный спектр разных сигналов при условии их нестационарности также может почти не отличаться, как это показано на рис. 2. На рис. 2с представлен спектр мощности стационарного сигнала, являющегося суммой двух синусоидальных сигналов с частотами $1/(200\pi)$ и $1/(60\pi)$ (см. рис. 2а), а на рис. 2d – нестационарного синусоидального сигнала (рис. 2b), когда его частота меняется с величины $1/(200\pi)$ в первой половине интервала на величину $1/(60\pi)$ – во второй половине [1].

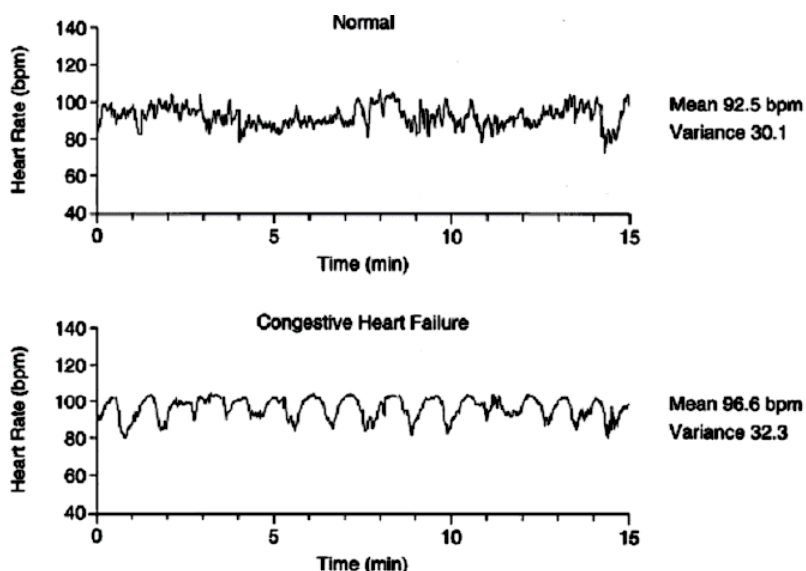


Рис. 1. Изменение частоты сердечных сокращений со временем для пациентов в норме и с патологией (Stanley H.E. et al., 1999)

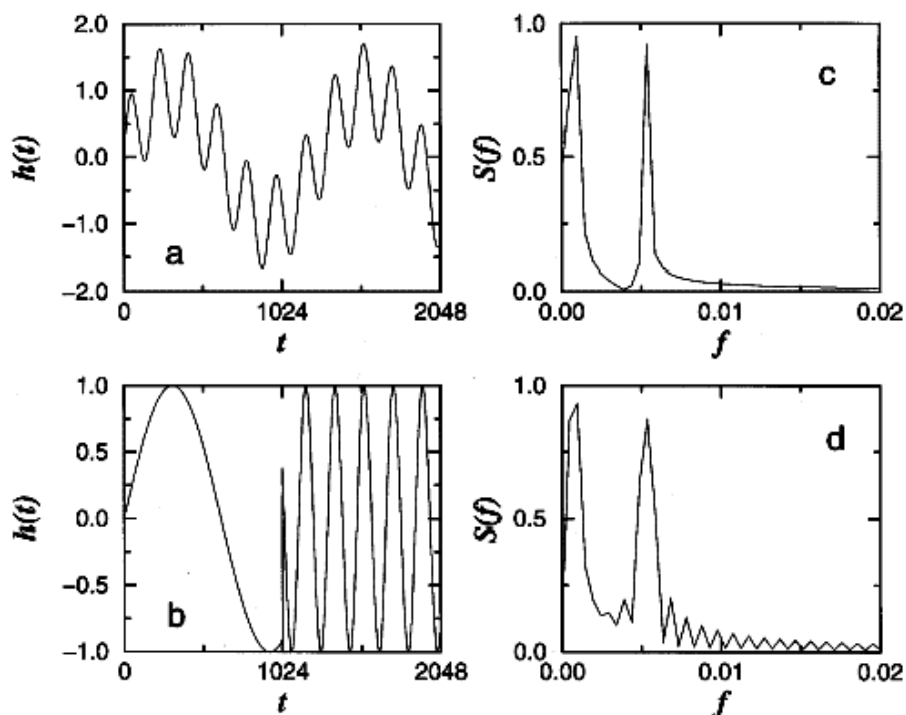


Рис. 2. Сравнение частотных спектров модельных стационарного (а) и нестационарного (б), сигналов

В связи с этим Сосн М. с соавт. отмечалось, что удовлетворительное описание variability сердечного ритма статистическими или спектральными методами пока не найдено.

Существуют разные подходы к анализу нестационарных данных. Например, нестационарный сигнал можно представить как сумму «регулярной» и «случайной» компонент, для описания которых могут применяться независи-

мые методы, учитывающие их специфику. Для разделения этих компонент применяются различные методы выделения регулярной компоненты (тренда). Идея разделения на примере сердечного ритма представлена на рис. 3: сигнал разбивают на подинтервалы определенной величины и усредняют по подинтервалам, полученная таким образом регулярная компонента сигнала затем может быть вычтена из полного сигнала (Stanley H.E. et al., 1999).

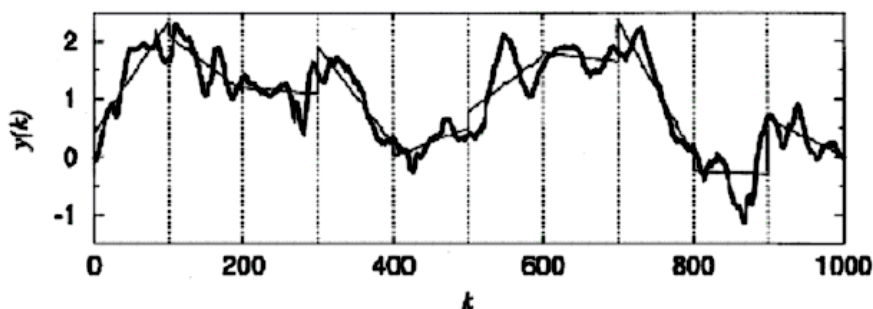


Рис. 3. Выделение регулярной компоненты из нестационарного сигнала

Здесь отрезки прямой, наложенные на исходный сигнал характеризуют тренд — $y(k) = \sum_{i=1}^k RR(i) - RR_{av}$, где $RR(i)$ — длительность сердечного сокращения, RR_{av} — его среднее значение.

С гомеостатической точки зрения случайные флуктуации рассматриваются как шум, который отфильтровывается от «настоящего» сигнала как не несущий никакой информации. Однако Stanley H.E. et al. было обнаружено, что эти флуктуации обладают определенной внутренней неперидической структурой, которая может быть связана с процессами ауторегуляции в организме.

Для моделирования структуры флуктуаций физиологических сигналов используются стохастическая, хаотическая и хаотическая модель с шумом (Еке А. с соавт.). В стохастической модели флуктуации обусловлены действием множества слабо выраженных факторов. В хаотической модели флуктуации возникают за счет нелинейной связи небольшого числа основных факторов. Комбинация этих механизмов возникновения флуктуаций составляет суть хаотической модели с шумом. Среди стохастических моделей наилучшее описание флуктуаций физиологических сигналов дает фрактальная модель. Важнейшим свойством фрактальных объектов является их самоподобие.

2. САМОПОДОБИЕ И РАЗМЕРНОСТЬ ПОДОБИЯ

2.1. Самоподобные объекты

Понятие самоподобного объекта можно ввести следующим образом. Пусть дан некоторый объект. Если изменить его размеры в r раз, $r < 1$, то получится новый объект, который составит некоторую часть исходного. Для ряда объектов при соответствующем выборе r можно добиться покрытия исходного объекта его уменьшенными копиями. В этом случае говорят, что данный объект самоподобен с коэффициентом подобия r .

Примеры самоподобных объектов.

Отрезок прямой (Рис. 4). Разделим единичный отрезок на N равных частей. Тогда каждую его часть можно считать копией всего отрезка, уменьшенного $\frac{1}{r}$ раз, где r - размер нового отрезка, образованного делением исходного. Таким образом, отрезок прямой можно считать самоподобным объектом в указанном выше смысле, так как этот отрезок можно покрыть N его уменьшенными копиями.

В данном случае N и r связаны соотношением $Nr = 1$.



Рис. 4. Самоподобие отрезка прямой. Здесь $N = 3$, $r = 1/3$

Квадрат (Рис. 5). Если квадрат разбить на N равных квадратов (с площадью в $\frac{1}{r^2}$ меньше площади исходного), то связь между N и r в данном случае имеет вид $Nr^2 = 1$.

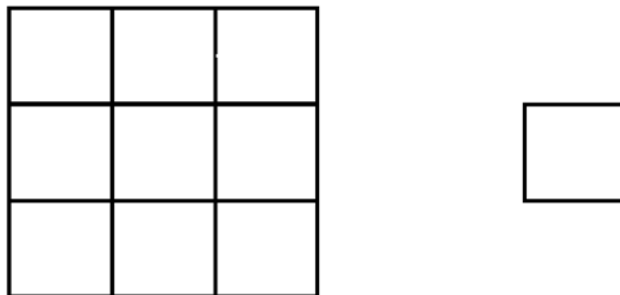


Рис. 5. Самоподобие квадрата. Здесь $N = 9$, $r = 1/3$

Куб (Рис. 6). Разобьем куб с ребром единичной длины на N равных кубов с объемом в $\frac{1}{r^3}$ меньше исходного. Величины N и r в данном случае связаны соотношением $Nr^3 = 1$.

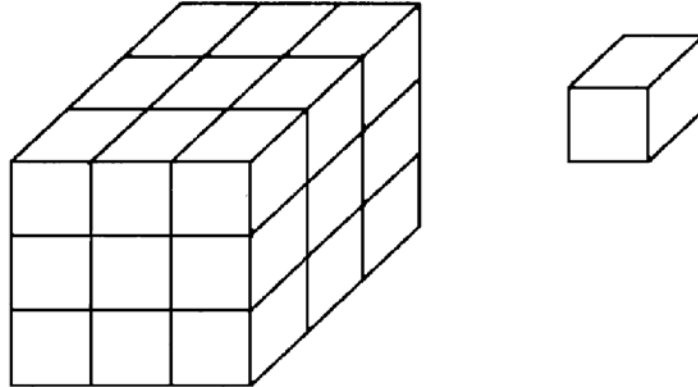


Рис. 6. Самоподобие куба. Здесь $N = 27$, $r = 1/3$

2.2. Размерность подобия

Фундаментальной для большинства определений размерности является идея измерения тем или иным способом исследуемого множества на некотором масштабе δ и наблюдения за тем, как ведут себя измерения при $\delta \rightarrow 0$.

В вышеприведенных примерах при изменении масштаба оригинала количество покрывающих оригинал уменьшенных копий N и коэффициент масштабирования r связаны соотношением

$$Nr^d = 1, \quad (2.1)$$

причем для отрезка параметр $d = 1$, для квадрата $d = 2$, для куба $d = 3$, что совпадает с «обычной» размерностью соответствующего множества.

Можно также сказать, что самоподобие выполняется, когда между масштабным множителем и числом покрывающих оригинал уменьшенных копий выполняется соотношение

$$r(N) = \left(\frac{1}{N}\right)^{1/d_s}.$$

Определим *размерность подобия* $d \equiv d_s$ данного самоподобного объекта как величину, входящую в выражение (2.1), которая связывает масштабный множитель и число покрывающих данный объект его уменьшенных копий.

В соответствии с (2.1) размерность подобия d_s можно определить по формуле

$$d_s = -\frac{\ln N}{\ln r(N)}. \quad (2.2)$$

Замечание. Приведенные выше примеры самоподобных объектов имеют целочисленные значения размерности подобия. Существуют ли множества с дробной размерностью подобия?

Множество Кантора.

Построим так называемое триадное канторово множество, которое было описано Георгом Кантором в 1883 году.

Вначале возьмем числовой отрезок $[0,1]$. Обозначим его через A_0 . На первом шаге ($n=1$) разделим A_0 на три равные части и выбросим средний интервал $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Обозначим полученное множество через A_1 . На втором шаге ($n=2$) сделаем то же с каждой оставшейся частью, получим множество A_2 . На n -ом шаге получим множество A_n , состоящее из 2^n отрезков длиной $\varepsilon = \left(\frac{1}{3}\right)^n$. В пределе $n \rightarrow \infty$ получим триадное канторово множество A . Множества A_n называют предфракталами n -го поколения. Процесс построения канторова множества иллюстрирует рис. 7.

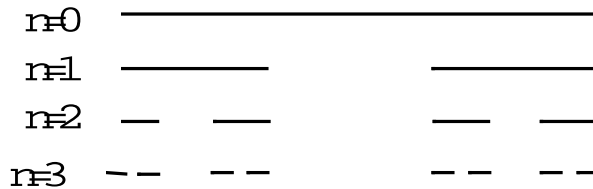


Рис. 7. Построение триадного канторова множества

Для множества Кантора предфрактал $(n+1)$ -го поколения можно покрыть двумя копиями предфрактала n -го поколения, уменьшенными в 3 раза. Из рис. 7 видно, что предфракталы соседних поколений при $n \rightarrow \infty$ все менее отличаются друг от друга. Поэтому можно считать, что предельное множество Кантора покрывается двумя своими копиями, уменьшенными в 3 раза. Тем самым, множество Кантора самоподобно с коэффициентом подобия $r = 1/3$.

В соответствии с (2.2) размерность подобия триадного множества Кантора $d_s = \ln 2 / \ln 3 \approx 0.63$. Следовательно, множество Кантора является примером самоподобного объекта с нецелым значением размерности подобия.

Кривая Кох.

Рассмотрим кривую Кох, первые два шага построения которой представлены на рис. 8. Уменьшая масштаб длины кривой n -го поколения в 3 раза, можно четырьмя уменьшенными копиями этой кривой покрыть кривую $(n+1)$ -го поколения. Полагая $r=1/3$, $N=4$ в формуле (2.2), найдем ее размерность подобия $d_s = \ln 4 / \ln 3$.

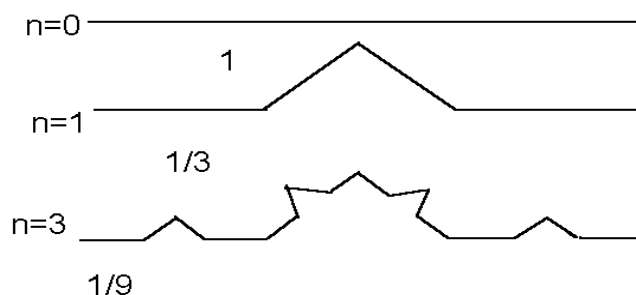


Рис. 8. Построение кривой Кох

Таким образом, кривая Кох также является примером самоподобного объекта с нецелым значением размерности подобия.

Если объект имеет нецелочисленную размерность подобия – он является фрактальным объектом.

Размерность подобия есть один из вариантов фрактальной размерности объекта.

Понятие размерности подобия применимо только для самоподобных объектов с единственным коэффициентом подобия r . На рис. 9 показан самоподобный объект, структура которого задается двумя коэффициентами подобия. Размерность подобия (2.2) этого объекта не определена, и для описания его структуры следует использовать другие определения размерности.

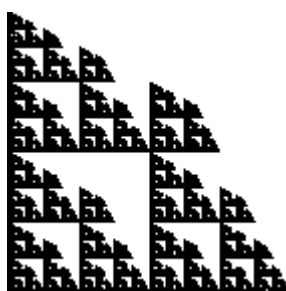


Рис. 9. Пример самоафинного фрактала

Объекты, коэффициенты подобия которого, определяющие самоподобие объекта в разных направлениях в пространстве не одинаковы, называют самоафинными. Как отмечалось Еке А. с соавт. временные физиологические сигналы являются самоафинными временными структурами.

3. КЛЕТОЧНАЯ РАЗМЕРНОСТЬ

3.1. Понятие клеточной размерности

Идея расчета размерности подобия базируется на покрытии исходного объекта его уменьшенными копиями, что не всегда удобно в практических расчетах. Обобщением размерности подобия является понятие клеточной («box-count») размерности.

Обобщение заключается в том, что объект покрывается «шарами» определенной величины с размерностью, равной размерности пространства, в которой находится исследуемый объект. В частности, если объект расположен вдоль прямой, «шаром» является отрезок линии, если объект расположен на плоскости, «шар» – произвольный элемент плоскости, если объект расположен в пространстве, то «шар» – произвольный элемент объема.

Для расчета размерности объекта, его покрывают «шарами» уменьшающихся размеров r . При расчете клеточной размерности D_{box} перекрытие покрывающих объект «шаров» не допускается.

Подсчитывая минимальное количество «шаров» размером r – $N(r)$, клеточную размерность объекта D_{box} можно найти из формулы

$$N(r) = \left(\frac{1}{r}\right)^{D_{box}} \text{ при } r \rightarrow 0$$

или

$$D_{box} = -\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ln N(r)}{\ln r}. \quad (3.1)$$

Найдем клеточную размерность канторова множества. Будем покрывать канторово множество отрезками уменьшающейся длины $r_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$. Из рис. 7 видно, что минимальное количество элементов покрытия, размером r_n равно $N_n = 2^n$. Следовательно,

$$D_{box} = -\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ln N(r)}{\ln r} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 2^n}{\ln 3^n} = \frac{\ln 2}{\ln 3}.$$

Вычислим клеточную размерность кривой Кох. Для $\varepsilon = (1/3)^n$ число сегментов, покрывающих кривую n -го поколения, равно

$$N(\varepsilon) = L(\varepsilon) / \varepsilon = \left(\frac{4}{3}\right)^n / \left(\frac{1}{3}\right)^n = 4^n.$$

Полагая $\alpha = \ln 4 / \ln 3$, получим $n = -\ln \varepsilon / \ln 3$, $N(\varepsilon) = \varepsilon^{-\alpha}$. Вычислим клеточную размерность D_{box} по формуле

$$D_{box} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \varepsilon^{-\alpha}}{\ln \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} = \alpha.$$

3.2. Практическое вычисление клеточной размерности

В упрощенном варианте покрытие множества A , размерность которого требуется вычислить, осуществляется одинаковыми элементарными множествами (отрезками, шарами, параллелепипедами и т. п.).

Соответственно, для вычисления размерности берется набор сеток, каждая из которых имеет свой размер ячейки, равный ε . Далее на исследуемое множество накладывается сетка размера ε и подсчитывается число $N(\varepsilon)$ квадратов, в которые попали точки множества A . Затем процедура повторяется с сеткой, с другим значением ε . Строится зависимость $\log N(\varepsilon)$ от $\log \varepsilon$ для нескольких значений ε , и размерность вычисляется по углу наклона отрезка этой прямой. Пример применения этого алгоритма для плоского множества, изображенного на рис. 10, представлен на рис. 11 (Кроновер Р.М., 2000). Наклон кривой на рис. 11 дает значение $D_{box} = 1.346$.

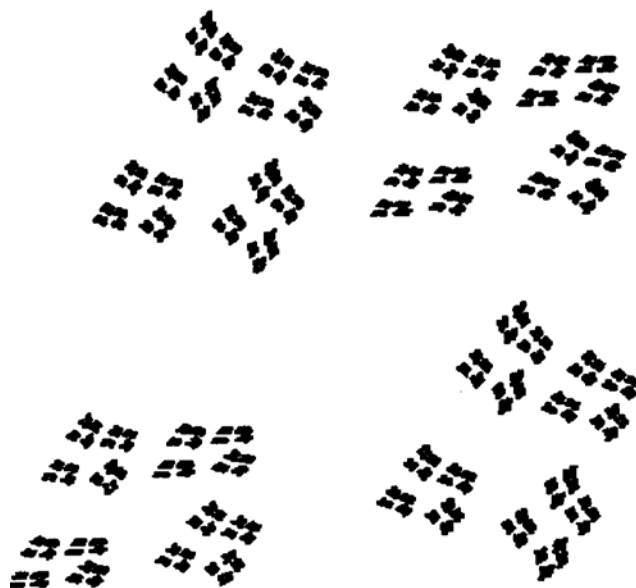


Рис. 10. Пример фрактального объекта

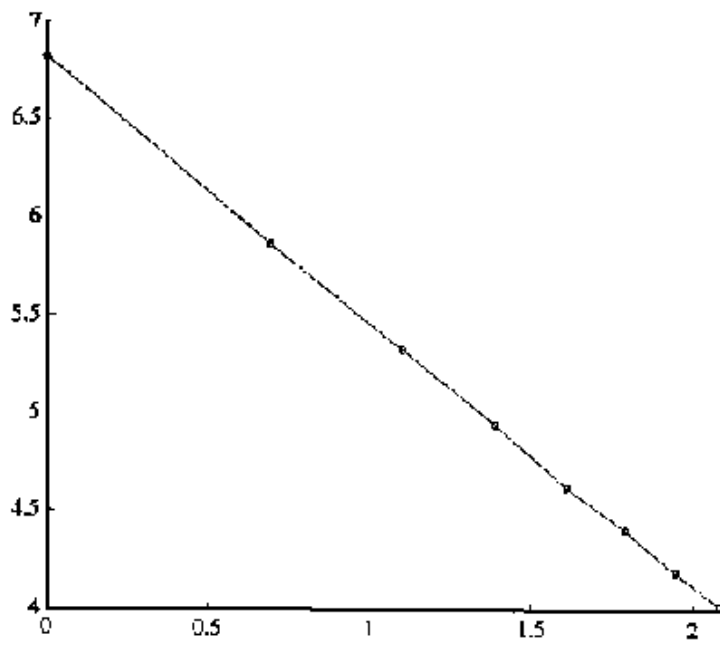


Рис. 11. Зависимость $\log N(\varepsilon)$ от $\log \varepsilon$ для фрактального объекта, изображенного на рис. 10

4. ФРАКТАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ФИЗИОЛОГИЧЕСКИХ ДАННЫХ

К настоящему времени установлено, что ряд физиологических данных обладает свойством самоподобия, по крайней мере, в статистическом смысле, следовательно, одним из эффективных инструментов их исследования является фрактальный анализ.

Вариабельность сердечного ритма является информативным интегральным показателем состояния организма. В качестве примера приведем результаты исследования флуктуаций variability сердечного ритма (рис. 12), проведенного Stanley H.E. с соавт. Регистрация сердечного ритма проводилась в течение суток, суточный интервал разбивался на три интервала по 8 часов. В качестве контрольной использовалась группа 17 мужчин и 12 женщин возрастом 20–64 лет (средний возраст 41 год). В этой группе измеренная размерность подобия variability сердечного ритма была равна 1.00 ± 0.10 . Для группы из 10 больных с синдромом коронарной смерти возрастом 35–82 года размерность подобия variability сердечного ритма была равна 1.24 ± 0.22 . Для группы из 15 больных с сердечной недостаточностью возрастом 22–71 год (средний возраст 56 год) размерность подобия variability сердечного ритма была равна 1.22 ± 0.25 . Данные значения регистрировались как для 8-часовых интервалов, так и для суточного интервала, что исключило гипотезу о возможном влиянии суточной активности на измеренные характеристики.

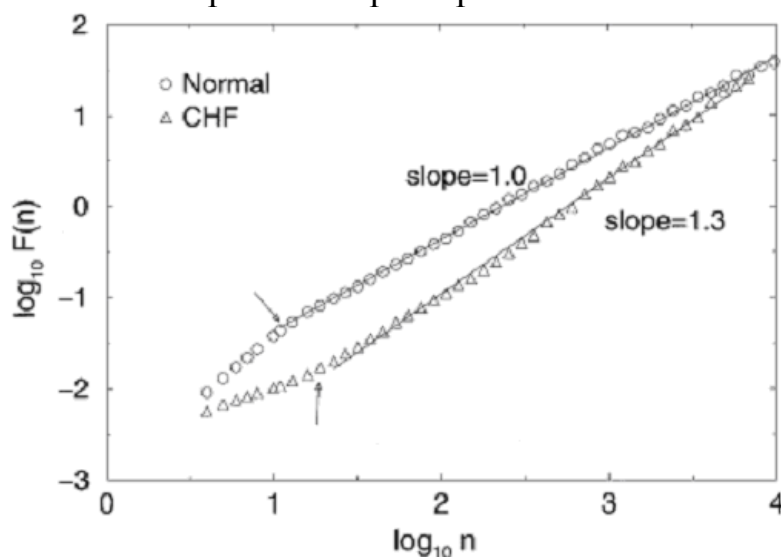


Рис. 12. Фрактальный анализ variability сердечного ритма (Stanley H.E. et al., 1999)

При расчете основных статистических характеристик – среднего и дисперсии, необходимо, чтобы плотность вероятности исследуемого процесса была интегрируемой функцией. Плотность вероятности многих физических про-

цессов, обладающих свойством самоподобия, является степенной функцией от эволюционного параметра – времени, пространственной координаты и т.п.:

$$f(t) \propto t^\alpha, \quad (4.1)$$

что как раз характерно для фрактальных распределений. При этом, в частности, среднее значение, задаваемое интегралом

$$\langle t \rangle = \int_0^\infty t t^\alpha dt, \quad (4.2)$$

может быть не определено. Guzman-Vargas L., Angulo-Brown F. показано (рис. 13), что при нарушении сердечного ритма за счет желудочковой тахикардии плотность вероятности распределения длительности сердечных сокращений имеет вид (4.1), и для данного случая среднее значение и дисперсия не могут быть определены. Следовательно, в этом случае среднее значение и дисперсия не могут использоваться для оценки состояния пациентов.

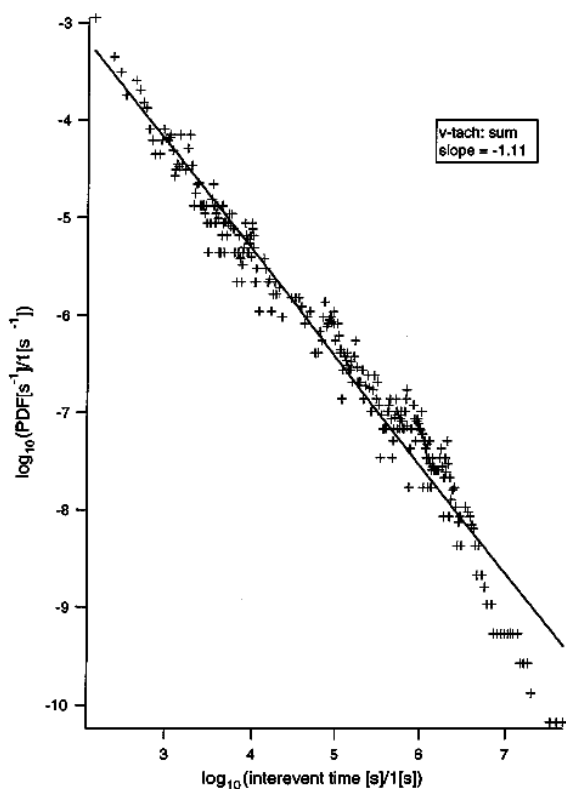


Рис. 13. Зависимость плотности вероятности (PDF) от времени для 30 пациентов, страдающих желудочковой тахикардией. Здесь $\alpha = 1.11 \pm 0.06$

5. ПОНЯТИЕ ЛАКУНАРНОСТИ

Клеточная размерность или другие виды размерности, характеризующие свойства самоподобия объекта, далеко не полностью отражают его геометрическую структуру.

Проиллюстрируем это утверждение на следующих примерах построения обобщенного канторова множества (в соответствии с Bauer W.R., et al.). В процессе построения исходный отрезок-инициатор делится на пять частей, две из которых выбрасываются. Повторение этой процедуры дает в пределе фрактальный объект.

На рис. 14 представлены множества, полученные после двух таких итераций. Они различаются только тем, какие именно части выбрасываются. Нетрудно видеть, что клеточная размерность всех предельных множеств, изображенных на рис. 14, одинакова и равна $d_{HB} = \frac{\log 3}{\log 5}$. Но, видно также, что их геометрическая структура различается. Следовательно, геометрическая структура самоподобного объекта однозначно определяет его фрактальную размерность, однако обратное неверно.

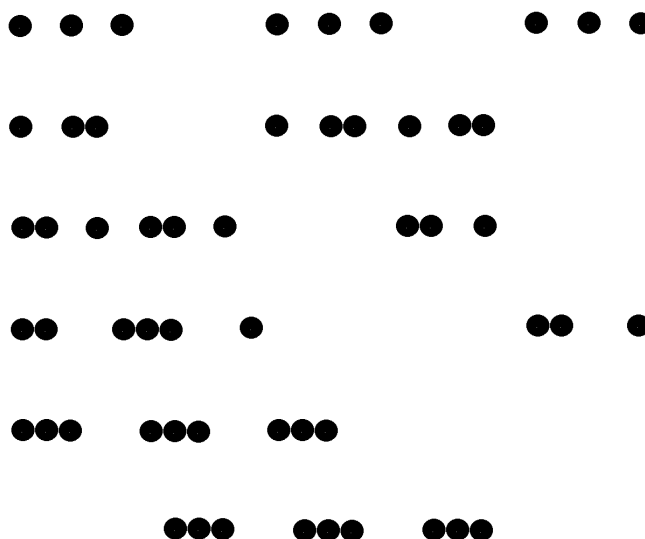


Рис. 14. Примеры построения обобщенного канторова множества с фрактальной размерностью $d_{HB} = \frac{\log 3}{\log 5}$

Таким образом, для однозначного описания самоподобных объектов необходимо привлекать дополнительные характеристики, одной из которых является лакунарность.

Объекты, изображенные на рис. 14, отличаются степенью однородности распределения элементов множества на его геометрическом носителе, которое, в свою очередь, определяется размерами пробелов, пропусков между этими элементами. *Лакунарность* (от *lacuna* – пропуск, пробел) характеризует однородность распределения исследуемого объекта.

Параметр лакунарности, количественно характеризующий геометрическую структуру объекта, определим следующим образом:

$$\tilde{\Lambda}_2 = \frac{\mu_2}{\mu_1^2} - 1, \quad (5.1)$$

где μ_1 , μ_2 - статистические моменты первого и второго порядков.

Из (5.1) следует, что параметр лакунарности характеризует степень отклонения значений распределения объекта от среднего значения, причем $\tilde{\Lambda}_2 = 0$ означает, что распределение однородно. Пример одномерного однородного распределения представлен на рис. 15(а).

Пример. Найдем лакунарность однородного распределения. При разбиении такого распределения на N одинаковых ячеек (кубов, подинтервалов и т.п.) "масса" δ , попадающая в каждую из таких ячеек, будет одинакова. При этом первые статистические моменты примут вид

$$\mu_1 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta = \delta, \quad \mu_2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta^2 = \delta^2.$$

Из определения лакунарности следует, что при этом $\tilde{\Lambda}_2 = 0$.

Поскольку параметр $\tilde{\Lambda}_2$ определяется статистическими моментами, то он применим и для произвольных, необязательно самоподобных распределений. Отметим, что в практических расчетах часто более удобно использование «смещенного» значения параметра лакунарности:

$$\Lambda = \tilde{\Lambda}_2 + 1. \quad (5.2)$$

Практически лакунарность рассчитывается следующим образом. Исследуемое распределение разбивается на подобласти (подинтервалы), количество которых $n(r)$ зависит от размера подобласти r . Затем находится относительная доля распределения в каждой ячейке, которой соответствующей нормировкой можно придать смысл вероятности. По набору таких вероятностей и рассчитываются необходимые моменты. При этом величина параметра $\tilde{\Lambda}_2$ будет зависеть от величины подинтервала разбиения.

На рис. 15 (б) представлен расчет параметра лакуарности эквидистантного «спектра», состоящего из 1000 одинаковых равноотстоящих линий.

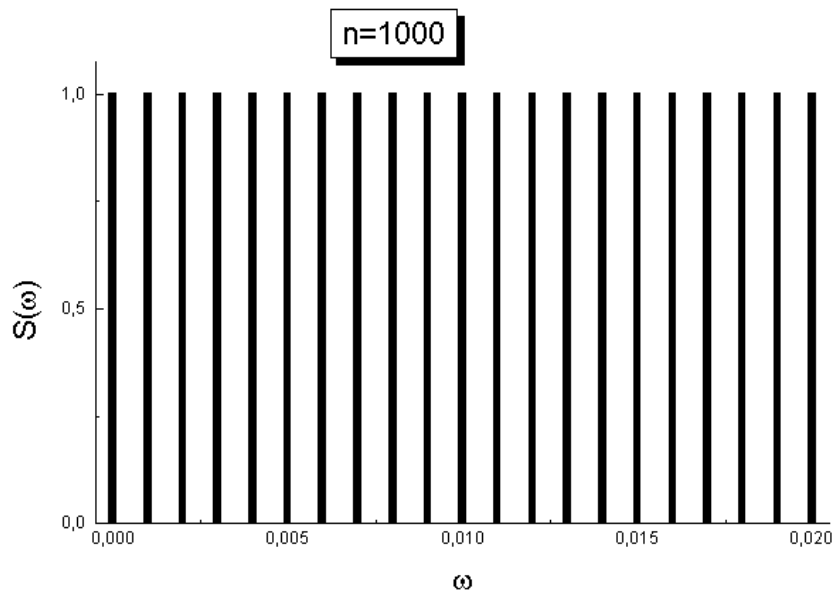


Рис. 15 а. Вид «эквидистантного» спектра

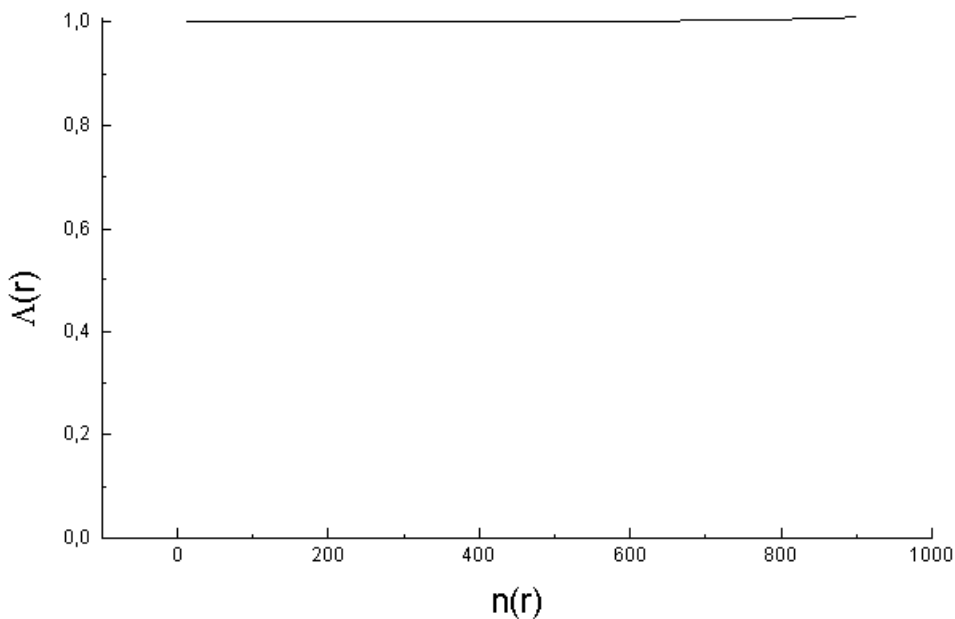


Рис. 15 б. Расчет параметра лакуарности для эквидистантного «спектра», изображенного на рис. 15 а

На рис. 16 представлен расчет параметра лакуарности для спектра, аналогичного предыдущему, но в этом спектре имеются периодические (с периодом в 40 линий) пропуски линий (по 20 линий).

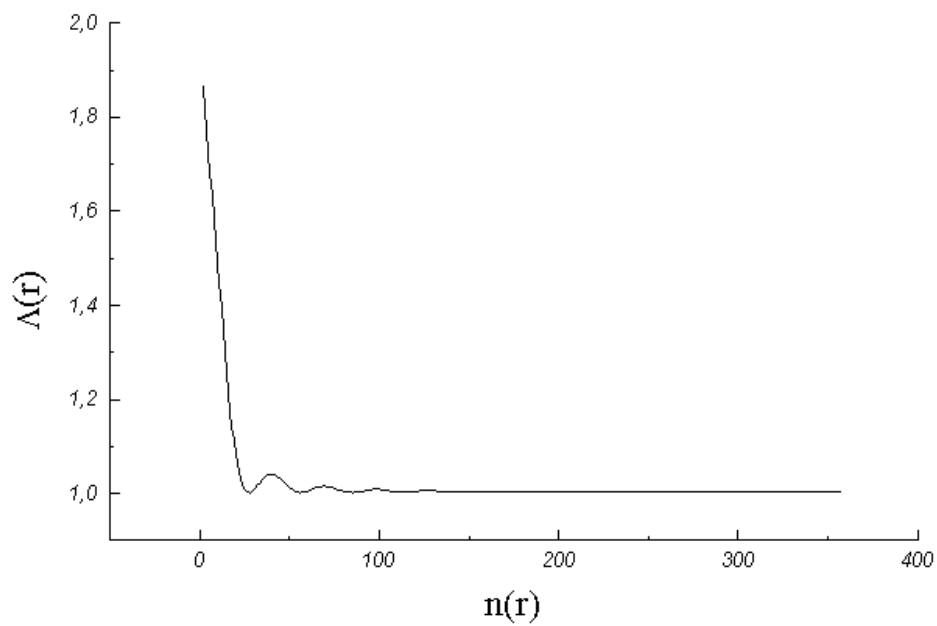


Рис. 16. Расчет параметра лакуарности

Из рисунка видно, что параметр лакуарности чувствителен к наличию пропусков (лакун) до тех пор, пока величина ячейки r не превысит размер этого пропуска.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Объясните способ построения триадного канторова множества.
2. Какое множество называется предфракталом n -го поколения?
3. Объясните алгоритм построения кривой Кох.
4. Какие множества называют самоподобными? Приведете примеры.
5. Дайте определение понятия размерности подобия самоподобного множества. Получите формулу для определения размерности подобия.
6. Вычислите размерности подобия для канторова множества и кривой Кох.
7. Объясните алгоритм практического вычисления клеточной размерности фрактального множества.
8. Полностью ли определяются геометрическая структура самоподобного объекта его фрактальной размерностью? Проиллюстрируйте ответ примером.
9. В чем заключается смысл понятия лакуарности? Как определяется параметр лакуарности?

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Stanley H.E. et al. Statistical physics and physiology: Monofractal and multifractal approaches // *Physica A*. 1999. V. 270. P. 309-324.
2. Coch M., Henning S., Beutelspather A., Klokner D. et al. The fractal geometry: a nonlinear analysis method for description of heart rate variability//*Herzschr Elektrophys*/ 1998. № 9. P. 212-221.
3. Peng C.A., Buldyrev S.V., Havin S., Stanley H.E et al. Mosaic organization of DNA nucleotides // *Physical Review E*. 1994. V.49, No.2. P.1685-1689.
4. Eke A., Herman P., Koscis L., Kozak L.R. Fractal characterization of complexity in temporal physiological signal // *Physiological Measurement*. 2002. V.23. P. R1-R38.
5. Кроновер Р.М. Фракталы и хаос в динамических системах. - М.: Постмаркет, 2000. - 352 с.
6. Guzman-Vargas L., Angulo-Brown F. Simple model of the aging effect in heartbeat time series // *Phys.Rev*. 2003. V. E67. P. 052901-1-052901-4.
7. Liebovitch L.S., et al. Nonlinear properties of cardiac rythm abnormalities // *Physical Review E*. 1999. V.59. №.3. P. 3312-3319.
8. Accardo A. et al. Use of fractal dimension for analysis electroencephalographic time series // *Biol. Cybern*. 1977. V.77. P. 339-350.
9. Fractal image compression: theory and application. Ed. by Yu.Fisher. Springer-Verlag, New York. 1994. 341 p.
10. Bauer W.R., et al. Fast high resolution magnetic resonance imaging demonstrates fractality of miocardial perfusion in microscopic dimensions // *Circulation Research*. 2001. V. 88. P. 340-346.
11. Allain C., Cloitre M. Characterizing the lacunarity of random and deterministic fractal sets // *Physical Review A*. 1991. V. 44. P. 3552-3558.

Учебное издание

**Ю.В. Кистенев
А.В. Шаповалов**

**Интегральный критерий
на основе оценки самоподобия**

Учебное пособие
2-е издание, исправленное

Редактор Зеленская И.А.

Издательство СибГМУ
634050, г. Томск, пр. Ленина, 107
тел. 8(3822) 51-41-53
E-mail: otd.redaktor@ssmu.ru

Подписано в печать 22.12.17
Формат 60x84 $\frac{1}{16}$. Бумага офсетная.
Печать ризограф. Гарнитура «Times». Печ. л. 1,4. Авт. л. 0,6
Тираж 30 экз. Заказ №

Отпечатано в Издательстве СибГМУ
634050, Томск, ул. Московский тракт, 2
E-mail: lab.poligrafii@ssmu.ru