

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Сибирский государственный медицинский университет»  
Министерства здравоохранения Российской Федерации

Кафедра медицинской и биологической кибернетики  
с курсом медицинской информатики

В.А. Фокин

# ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ КИБЕРНЕТИКИ

Курс лекций

Томск  
Издательство СибГМУ  
2017

УДК 004(075.8)

ББК 32.81я73

Ф753 Фокин В.А. Теоретические основы кибернетики: курс лекций: учебное пособие / Томск: СибГМУ, 2017. — 244 с.

В курсе лекций рассмотрены математические методы получения, преобразования и анализа биомедицинской информации, которые являются базовыми составными частями теоретических основ кибернетики.

Материал соответствует требованиям программы обучения по специальности "врач-кибернетик" медико-биологических факультетов. Учебное пособие может быть рекомендовано студентам, магистрантам и аспирантам естественнонаучных и технических направлений ВУЗов, интересующихся теоретическими и прикладными аспектами анализа информации и принятия решений в области биомедицинских исследований.

УДК 004(075.8)

ББК 32.81я73

*Утверждено к печати учебно-методической комиссией медико-биологического факультета ФГБОУ ВО СибГМУ Минздрава России (протокол № 4 от 27.12.2017 г).*

© Сибирский государственный медицинский университет, 2017

© Фокин В.А., 2017

# Оглавление

<b>Введение</b>	<b>7</b>
<b>Лекция 1. Введение в теоретические основы кибернетики</b>	<b>9</b>
Определение кибернетики . . . . .	9
Методы медицинской кибернетики . . . . .	11
Особенности анализа биомедицинских сигналов . . . . .	15
Контрольные вопросы и задания . . . . .	19
<b>Лекция 2. Основные понятия теории информации</b>	<b>20</b>
Определение информации . . . . .	20
Количественная оценка информации . . . . .	22
Энтропия системы и ее свойства . . . . .	27
Относительная энтропия . . . . .	31
Контрольные вопросы и задания . . . . .	33
<b>Лекция 3. Энтропия взаимосвязанных систем</b>	<b>35</b>
Условная энтропия . . . . .	35
Энтропия объединения систем . . . . .	37
Энтропия эргодических источников сообщений . . . . .	40
Условная энтропия в случае нормального закона распределения	45
Контрольные вопросы и задания . . . . .	46
<b>Лекция 4. Информационное описание систем передачи информации</b>	<b>48</b>
Информационная модель канала связи . . . . .	48
Количество информации при передаче по каналу связи с помехами . . . . .	52
Информационные характеристики источника сообщений . . . . .	56
Пропускная способность канала связи с помехами . . . . .	58
Контрольные вопросы и задания . . . . .	61

<b>Лекция 5. Теория кодирования</b>	<b>63</b>
Основные понятия теории кодирования . . . . .	63
Оптимальное кодирование . . . . .	67
Шифрование информации . . . . .	72
Контрольные вопросы и задания . . . . .	74
<b>Лекция 6. Методы повышения надежности передачи информации</b>	<b>76</b>
Обнаружение и исправление ошибок . . . . .	76
Кодовое расстояние . . . . .	79
Идеальный приемник Котельникова . . . . .	81
Корректирующий код Хемминга . . . . .	82
Контрольные вопросы и задания . . . . .	84
<b>Лекция 7. Основы преобразования сигналов</b>	<b>86</b>
Классификация сигналов . . . . .	86
Разложение сигнала по системам ортогональных функций . . .	90
Контрольные вопросы и задания . . . . .	97
<b>Лекция 8. Анализ детерминированных сигналов</b>	<b>98</b>
Гармонический анализ периодических сигналов. Ряд Фурье . .	98
Гармонический анализ непериодических сигналов . . . . .	101
Корреляционная функция детерминированного сигнала . . . . .	103
Разложение сигнала в ряд Котельникова . . . . .	105
Контрольные вопросы и задания . . . . .	107
<b>Лекция 9. Анализ случайных сигналов</b>	<b>108</b>
Понятие случайной функции . . . . .	108
Характеристики случайной функции . . . . .	109
Стационарные случайные сигналы . . . . .	112
Контрольные вопросы и задания . . . . .	116
<b>Лекция 10. Основные понятия теории распознавания образов</b>	<b>117</b>
Постановка задачи распознавания . . . . .	117
Виды признаков . . . . .	121
Расстояние и мера сходства . . . . .	122
Расстояние от точки до множества и внутримножественное расстояние . . . . .	125

Контрольные вопросы и задания . . . . .	127
<b>Лекция 11. Геометрический подход к принятию решений</b>	<b>128</b>
Линейные дискриминантные функции . . . . .	128
Классификация по принципу минимума расстояния . . . . .	133
Обучение распознаванию: алгоритм перцептрона . . . . .	135
Кластеризация. Оценка качества кластеризации . . . . .	140
Алгоритмы кластеризации . . . . .	143
Контрольные вопросы и задания . . . . .	147
<b>Лекция 12. Статистический подход к задачам принятия ре- шений</b>	<b>149</b>
Байесовский классификатор . . . . .	149
Байесовский классификатор в случае нормального закона рас- пределения . . . . .	154
Последовательный анализ Вальда в задачах медицинской диа- гностики . . . . .	157
Оценка информативности признаков . . . . .	161
<b>Лекция 13. Другие процедуры принятия решений</b>	<b>166</b>
Методы потенциальных функций . . . . .	166
Методы теории формальных языков . . . . .	168
Методы коллективов решающих правил . . . . .	170
Нейронные сети . . . . .	171
<b>Лекция 14. Принципы распознавания зрительных образов</b>	<b>173</b>
Представление зрительной информации . . . . .	173
Предварительная обработка изображения . . . . .	175
Распознавание зрительных образов . . . . .	178
Автоматизация распознавания медицинских изображений . . . .	180
<b>Лекция 15. Планирование оптимального эксперимента как наука</b>	<b>184</b>
Общая характеристика эксперимента . . . . .	184
Описание объекта исследования . . . . .	187
Измерения и принципы оценки погрешностей . . . . .	190
Принципы оптимального планирования . . . . .	193
Постановка задачи оптимизации и оценки параметров . . . . .	194
Виды критериев оптимизации . . . . .	195

Контрольные вопросы и задания . . . . .	199
<b>Лекция 16. Оптимальные стратегии поиска экстремума</b>	<b>200</b>
Контрольные вопросы и задания . . . . .	200
Минимаксный критерий поиска экстремума . . . . .	200
Оптимальная стратегия пассивного эксперимента . . . . .	202
Оптимальные стратегии последовательного эксперимента . . . . .	205
<b>Лекция 17. Методы многомерного поиска экстремума</b>	<b>208</b>
Рельеф функции . . . . .	208
Метод случайного поиска . . . . .	209
Градиентные методы поиска экстремума . . . . .	211
Постановка задачи линейного программирования . . . . .	213
Контрольные вопросы и задания . . . . .	219
<b>Лекция 18. Планирование эксперимента в условиях неоднородности</b>	<b>221</b>
Логические основы планирования эксперимента . . . . .	221
Понятие оптимального многофакторного планирования . . . . .	224
Оптимальные планы факторного эксперимента первого порядка	229
Планирование отсеивающих экспериментов . . . . .	238
Контрольные вопросы и задания . . . . .	242
<b>Рекомендуемая литература</b>	<b>243</b>

# Введение

Дисциплина «Теоретические основы кибернетики» – наука, изучающая общие принципы получения, хранения и обработки информации необходимые для создания компьютерных систем диагностики, анализа биомедицинских данных и оптимального планирования научных исследований применительно к биологическим, медицинским и другим сложным системам. Ее успешное освоение определяется знаниями полученными в результате изучения таких дисциплин, как ”Информатика, медицинская информатика”, ”Дифференциальное и интегральное исчисление”, ”Теория вероятности и математическая статистика”, ”Основы программирования”.

В настоящее время место математических курсов в подготовке современных специалистов в области биоинформационных технологий является одним из ключевых. Это обусловлено тем, что математические методы являются мощным средством исследования, существенно расширяющим круг решаемых биомедицинских задач, как научно-исследовательских так и прикладных. Совершенствование вычислительной техники, методов математического моделирования позволяет заменить эксперименты на биологических объектах исследованием их математических моделей. Построение и анализ моделей различного рода дает возможность формализовать многие сложные задачи и найти оптимальные решения по управлению и воздействию на биообъекты.

Целью данного лекционного курса является формирование у студентов основ фундаментальных знаний о кибернетике как науке о процессах управления, связи и переработки информации в биологических, технических и социальных системах, развитие компетенций направленных на использование основных математических и иных естественнонаучных понятий и методов при решении профессиональных задач.

В задачи изучения дисциплины входит:

- ознакомление студентов с основными направлениями применения методов теоретической кибернетики в биомедицинских исследова-

ниях;

- приобретение теоретических знаний и практических навыков анализа биомедицинской информации; изучение математических методов и алгоритмов анализа клинико-лабораторных данных обследования больного;
- освоение навыков разработки методов математического моделирования на ЭВМ деятельности различных функциональных систем и оценки состояния организма, а также для успешного освоения специальных курсов и дисциплин специальности.

Полученные в результате изучения дисциплины знания, умения и навыки необходимы для успешного освоения последующих дисциплин специальности "медицинская кибернетика": "Физиологическая кибернетика" "Системный анализ", "Медицинские информационные системы", "Компьютерные технологии обработки биомедицинской информации".



# Лекция 1. Введение в теоретические основы кибернетики

## Определение кибернетики

Наука кибернетика является основой комплексного изучения и управления сложными объектами и системами. Понимание механизмов, определяющих процессы, происходящие в таких системах и обоснование оптимальных способов воздействия на них являются важной составляющей подготовки специалистов во всех областях научных исследований, включая биомедицину.

Название "кибернетика" произошло от греческого слова *κυβερνητική* – "рулевой", "кормчий" что изначально соответствовало понятию "искусство управления кораблем". В дальнейшем это понятие стало рассматриваться в более широком смысле, как искусство управлять государством (людьми).

Основоположником кибернетики в современном ее понимании является американский математик Н. Винер (рис. 1). В 1943 году Винер организовал в Принстонском университете (США) семинар, в котором принимали участие специалисты различных научных областей: нейрофизиологи, математики, специалисты по теории связи и вычислительной технике. Оказалось, что все они, несмотря на различие предметных областей, оперируют практически одними и теми же понятиями: система, взаимосвязь, память, информация и т.п. Этот семинар положил начало научному направлению, впоследствии получившему имя «кибернетика», в основе которого положены два фундаментальных понятия: связь и управление. В 1948 году Н. Винером была опубликована книга «Кибернетика или управление и связь в животном и машине» в которой им было дано определение науки кибернетики.

**Определение** (Н. Винер). *Кибернетика* — наука об управлении и связи в живых организмах, машинах и обществе.

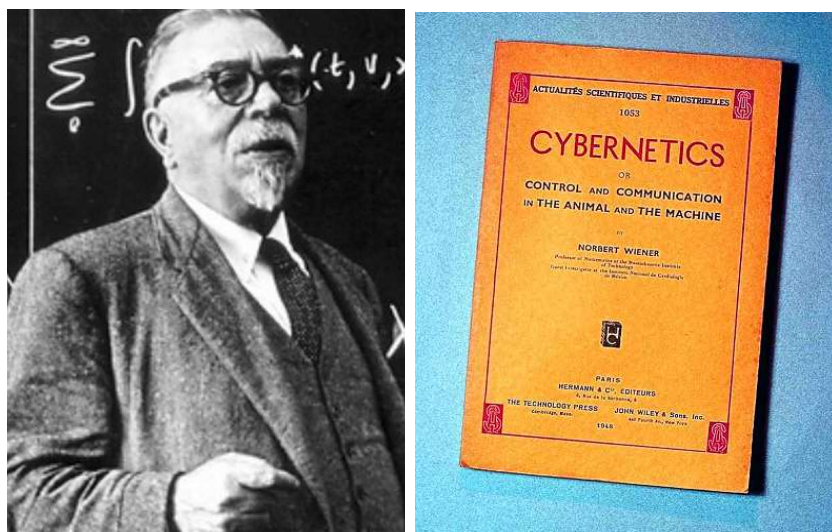


Рис. 1. Н. Винер (1894-1964).

Винером был сформулирован основной признак кибернетической системы, вне зависимости от того является эта система живым объектом или машиной. Этим признаком является *способность к самообучению*, которая заключается в накоплении информации об окружающих условиях, ее последующем анализе и построении алгоритмов поведения в динамически меняющихся условиях внешнего мира.

В настоящее время существует много различных определений понятия кибернетика. Ниже приведены два определения советских математиков, внесших большой вклад в развитие этой науки:

**Определение** (акад. А.Н. Колмогоров, 1903-1987). *Кибернетика — наука занимающаяся изучением систем любой природы, способных воспринимать, хранить, перерабатывать информацию и использовать ее для управления.*

**Определение** (акад. В.М. Глушков, 1923-1982). *Кибернетика — наука об общих законах получения, хранения, передачи и преобразования информации в сложных управляющих системах.*

Кибернетика рассматривает взаимодействия системы со средой и систем между собой исключительно как информационные. Рассмотрение живых и технических объектов с единой точки зрения, как преобразователей и анализаторов информации, составляет основу кибернетического подхода к их изучению. Этот подход является общим и универсальным, он основан на определенном уровне абстрактного описания, привлечении

математических методов для анализа поведения и управления состоянием изучаемых систем.

В кибернетике широко применяется математический (машинный) эксперимент, или математическое моделирование. Смысл его заключается в том, что исследуется не сам объект, а его модельное математическое описание. Быстродействие современных компьютеров позволяет моделировать и изучать процессы в более быстром темпе, чем они происходят в действительности.

## Методы медицинской кибернетики

Важную роль кибернетический подход играет в тех областях знаний, которые имеют дело с большими, сложными и плохоорганизованными системами, это в первую очередь общество, экономика, биология, медицина. Эти направления кибернетики соответственно называются: кибернетика социальная, биологическая, техническая, медицинская и т.п.

**Определение.** *Медицинская кибернетика — раздел кибернетики изучающий процессы управления и переработки информации в живых организмах и коллективах людей применительно к задачам лечения и профилактики заболеваний.*

При анализе свойств биомедицинских систем достаточно часто происходит абстрагирование от предметной области исследования (т.е. происходит отвлечение от конкретных свойств массы, химических свойств изучаемых лекарственных препаратов, способов представления измеряемых сигналов, выявления конкретных патологий и т.п.) и использование формализованных математических подходов. Знание математических методов обработки, представления и анализа биомедицинской информации составляет основу для организации эффективной работы в любом из медицинских направлений исследований, является важной составляющей понимания и интерпретации биологических данных, определяет умение и навыки правильно и критически оценивать результаты научных исследований и оптимальным образом планировать управление и воздействие на биообъект.

Можно выделить ряд этапов кибернетического исследования биосистем и используемые на этих этапах математические методы (рис. 2).

**I. Измерение, преобразование, хранение.** Получение и преобразование первичных данных для их хранения является первым этапом

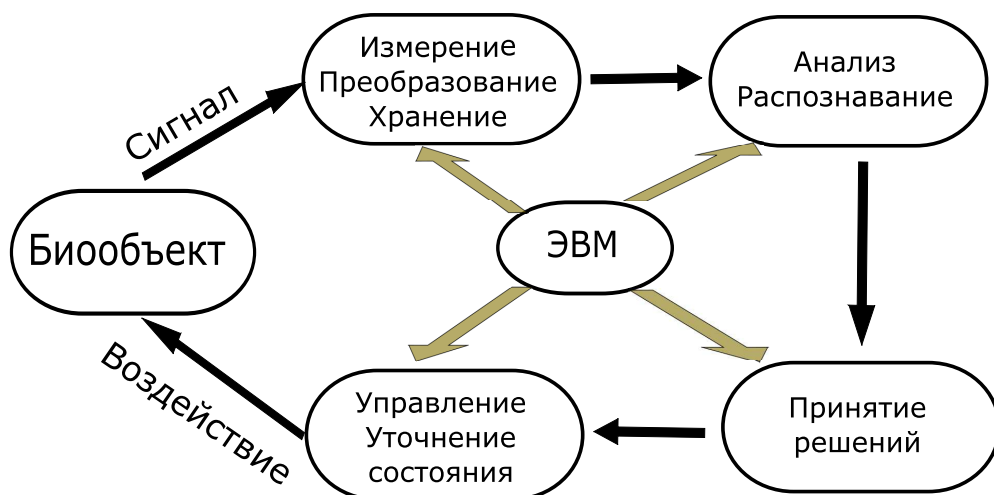


Рис. 2. Общая схема кибернетического исследования биосистемы.

анализа биосистемы. Этому этапу работы необходимо уделять максимальное внимание, т.к. от полноты и качества измеренных данных зависят получаемые в результате их анализа, выводы. Следует помнить, что любые недочеты в получении исходных данных можно компенсировать, как правило, только постановкой нового исследования.

Измерение первичных данных ориентировано на количественное описание изучаемого явления и заключается в их систематизации и преобразовании. Уже на этом этапе перед исследователем возникает ряд проблем связанных с процедурой измерения, поскольку решение большого круга биомедицинских проблем требует применения сложных и дорогостоящих приборов и методик получения данных, характеризующих состояние системы. Как правило, первичные данные представлены в форме электрических или иных сигналов, снимаемых прибором, которые являются не чем иным, как только способом фиксации или отражения процессов, происходящих в изучаемой биосистеме. Соответствие измеряемого сигнала состоянию исследуемой системы будет зависеть от адекватности теоретических моделей, положенных разработчиками в основу прибора измерения, способа преобразования исходного сигнала, учета технических характеристик каналов передачи сигналов, методов кодирования и хранения информации.

Полученные, преобразованные и сохраненные данные не являются самоцелью, а служат, прежде всего, для извлечения сведений о со-

стоянии биомедицинской системы.

Качественная и количественная оценка характеристик сигнала и преобразование его к виду используемому для хранения в компьютере или на иных носителях требует знания таких математических разделов, как теория вероятности и математическая статистика, теория сигналов, теория информации и кодирования.

**II. Анализ, распознавание.** На этом этапе сигналы, а также их характеристики анализируются с целью извлечения содержательной информации об изучаемой биомедицинской системе. После того, как информативные признаки выделены, необходимо построить правило классификации, т.е. формальную процедуру позволяющую на основе измеренных признаков принимать решение о принадлежности изучаемого биообъекта к заданному классу.

Цель распознавания – установить, можно ли по измеренному набору показателей отнести изучаемые объекты к определенному классу. Сама процедура построения правила классификации называется *обучением*. Выделяют два вида обучения:

- *Обучение с учителем* – построение правила классификации на основе обучающей выборки, в которой представлены объекты с априорно известной классификацией.
- *Обучение без учителя* – построение правила классификации на основе обучающей выборки, для объектов которой классификация неизвестна. Как количество классов, так и принадлежность объектов к заданному классу требуется предварительно выделить в процессе анализа признаков.

Важно понимать, что построение правила принятия решения (обучение распознаванию) основано на анализе ограниченной совокупности объектов с известной принадлежностью объекта к заданному классу — обучающей выборке. Причем принадлежность объектов обучающей выборки к заданным классам должна производиться на основе признаков, внешних по отношению к анализируемым. Например, для построения правила классификации двух различных диагнозов используется набор клинико-лабораторных показателей, а диагноз устанавливается по клиническим признакам проявления заболевания не входящим в этот набор.

Основные вопросы, на которые требуется ответить исследователю на этом этапе работы можно сформулировать так:

- какие преобразования исходных данных приводят их к виду, удобному для распознавания;
- использование каких из измеренных признаков позволяет извлекать максимум информации для классификации состояний системы;
- применение каких методов анализа является эффективным для распознавания и оценки изучаемых состояний.

Ответ на эти вопросы в приложении к биомедицинским задачам существенно усложняется тем, что на измеренную и преобразованную информацию накладываются особенности обусловленные внутри- и межиндивидуальными различиями в измеряемых показателях биосистем. Для решения подобных задач применяются методы теории распознавания образов - раздела математики, разрабатывающего принципы и методы классификации, а также идентификации предметов, явлений, процессов, сигналов, ситуаций, т.е. всех тех объектов, которые могут быть описаны набором признаков или свойств.

**III. Принятие решений (классификация).** На этом этапе необходимо оценить качество принятия решений, т.е. насколько хорошо результаты отнесения биообъекта к тому или иному состоянию по построенному правилу классификации совпадают с истинным состоянием биообъекта. Для этого используется дополнительная (верифицирующая) выборка, т.е. набор биообъектов с известной классификацией, признаки которых не использовались для построения правила распознавания. Если процент совпадений классификации с применением решающего правила хорошо совпадает с истинной классификацией объектов, то построенное правило можно использовать. Иногда в качестве верифицирующей выборки используют саму обучающую выборку, однако в этом случае мы получаем завышенную оценку качества принятия решения.

Для построения правил классификации используются различные математические подходы, основанные на геометрическом и статистическом подходах. В первом случае биообъекты рассматриваются, как векторы и отображаются точками в пространстве признаков.

Анализ их взаимного расположения позволяет выделить границы между классами, интерпретируемые как правила классификации. Статистический подход основан на оценке вероятности принадлежности биообъекта к различным классам при одном и том же наборе признаков.

**IV. Управление, уточнение состояния.** Полученная информация о состоянии биомедицинской системы позволяет исследователю более рационально и эффективно выбрать направление дальнейшего исследования, как с точки зрения более детального изучения и уточнения свойств самой системы и механизмов ее взаимодействия с окружением, так и точки зрения поиска параметров и воздействий, оптимизирующих поведение изучаемой системы. В современных условиях, особенно в случаях, когда получение информации связано с большими затратами, оптимальное планирование исследований позволяет существенно повысить их эффективность при одних и тех же временных, стоимостных и т.п. затратах. Организация и планирование экспериментальных исследований является важной составной частью исследовательской деятельности. Использование ЭВМ существенно расширяет возможности планирования, т.к. появляется возможность анализа и оптимизации самих планов эксперимента, автоматизации исследований и т.п. В качестве математического аппарата используются теория планирования эксперимента - раздел математической статистики, изучающий рациональную организацию измерений и являющийся методологической основой современных исследований.

Такое разделение на этапы работы с медико-биологической информацией достаточно условно. Оно служит для пояснения того, почему и в какой последовательности изложены разделы в учебном пособии. Очевидно, что можно указать и другие математические теории и методы, которые успешно используются при решении различных биомедицинских задач.

## **Особенности анализа биомедицинских сигналов**

Развитие и использование компьютерной техники для анализа и съема сигналов нашло широкое применение в решении биомедицинских задач.

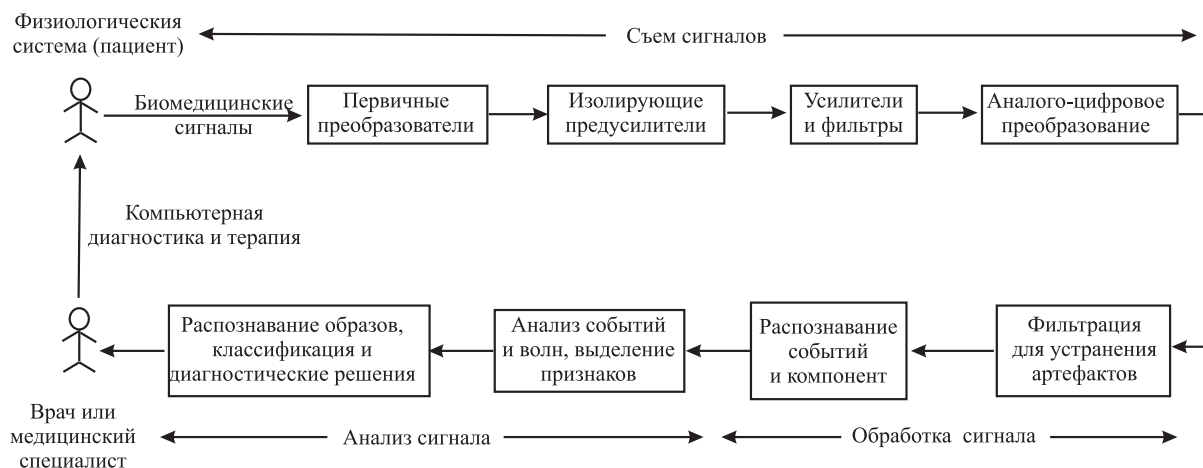


Рис. 3. Компьютерная диагностика и терапия на основе анализа биомедицинских сигналов

Ниже перечислены биомедицинские задачи анализа сигналов, в которых компьютер является одним из основных инструментов.

- Сбор данных и количественная оценка явлений для интерпретации свойств исследуемой биосистемы.
- Диагностика нарушений, патологий и аномальностей состояния и поведения биосистемы.
- Мониторинг состояния – получение непрерывной или периодической информации о состоянии биосистемы.
- Терапия и управление состоянием биосистем на основе данных, полученных при сборе, диагностике и мониторинге состояния.
- Оценка эффективности управляющих воздействий на биосистему.

На рисунке 3 изображена типовая схема осуществления компьютерной диагностики<sup>1</sup>, на которой приведены основные этапы и последовательность обработки сигналов.

Съем сигналов с биосистемы (пациента) может осуществляться с помощью инвазивных и неинвазивных процедур. **Инвазивные процедуры** съема сигналов предполагают помещение датчиков или других устройств сигналов внутрь тела. Например, введение катетерных датчиков через главную артерию или вену для съема интракардиальных сигналов, а

<sup>1</sup>Рангайян Р.М. Анализ биомедицинских сигналов. Практический подход. - М.:Физматлит, 2007. - 440 с.



также всевозможные процедуры с использованием ультразвука, рентгеновского излучения и т.п. В *неинвазивных* процедурах съема сигналов используется поверхностное наложение датчиков, что позволяет существенно снизить риск для пациента. Примером неинвазивного съема сигналов является запись электрокардиограммы с наложением поверхностных электродов на грудь пациента.

Другая классификация процедур съема сигналов заключается в разделении их на пассивные и активные. В *активных процедурах* к пациенту прилагаются некоторые внешние стимулы или требуется выполнение им определенных действий, реакция на которые фиксируется датчиками. В *пассивных* процедурах от пациента не требуется каких-либо дополнительных действий при съеме сигналов.

В практической реализации процедур съема сигналов с биосистем существует ряд трудностей, обусловленных как видом снимаемых сигналов, так и особенностями функционирования живых систем. К ним можно отнести:

**Доступность параметров для измерения.** Большинство органов и систем организма, для которых проводятся диагностические процедуры с измерением сигналов расположены внутри организма. Прямая доступность к этим объектам или внутрь их существенно ограничена или связана с большим риском для пациента. А неинвазивные процедуры не всегда дают достаточное количество информации об особенностях функционирования или изменениях происходящих в исследуемой системе. Поэтому планируя обследование необходимо соотносить информативность и полноту обследования пациента и риски связанные с проведением медицинских вмешательств.

**Непостоянство источника сигнала.** Живые системы являются динамическими системами со многими параметрами. Такая природа биосистем приводит к тому, что снимаемые с них сигналы являются по сути нестационарными и случайными, существенно зависящими от физического и психоэмоционального состояния пациента. Это выражается в случайных изменениях измеряемых сигналов во времени, требует наблюдения их в течение длительных периодов времени, включающих всевозможные состояния системы, при последующей интерпретации результатов исследований в контексте этих состояний.

### **Связь и взаимодействие между физиологическими системами.**

Функционирование различных систем организма не являются независимым. Уровень и характер взаимодействий между ними существенно зависит от состояния организма. Игнорирование этих взаимодействий может приводить к неправильной интерпретации сигнала.

### **Влияние оборудования и процедуры измерения.**

Проведение измерений или подключение исследуемой биосистемы к оборудованию может изменять поведение и реакцию системы, что может приводить к изменениям снимаемых характеристик сигналов. В частности при проведении многократных активных измерений у пациента будет накапливаться усталость, неучет которой может приводить к неадекватной оценке его состояния.

### **Физиологические артефакты и помехи.**

Различные проявления жизнедеятельности организма во время проведения процедуры измерения являются нежелательными и рассматриваются, как помехи или физиологические артефакты, влияющие на сигнал. Например, кашель, напряжение мышц при съеме электромиограммы, изменение ритма дыхания при записи электрокардиограммы и т.п. Во многих случаях удаление таких помех не представляется возможным и единственный способ их учета заключается в специальных методах фильтрации сигнала.

### **Ограничения энергии сигналов.**

Большинство биомедицинских сигналов генерируется на уровне милли- или микровольт. Запись таких сигналов требует высокой чувствительности аппаратуры и высокой степени защиты от влияния помех.

### **Безопасность пациента.**

Защита пациента от поражающих воздействий является одним из основных требований к проведению измерений. Всегда требуется соотносить пользу диагностической процедуры, с точки зрения выбора наилучшей тактики дальнейшего медицинского вмешательства, и риском для жизнедеятельности пациента, вносимой процедурой обследования. Из соображений безопасности приходится использовать способы измерения сигналов не всегда оптимальные в информационном смысле, но более безопасные и щадящие для жизни пациента.

Таким образом, биомедицинские сигналы следует рассматривать как индикаторы состояния биосистемы, причем между снимаемыми сигналами и патологическими состояниями не всегда может быть установлена однозначная связь. Результаты анализа биосигналов должны интерпретироваться в совокупности со всем комплексом клинических признаков, симптомов и данных.

## **Контрольные вопросы и задания**

1. Что является основным признаком кибернетической системы?
2. Что является предметом кибернетических исследований?
3. Назовите основные этапы кибернетического исследования?
4. В чем заключается роль и место медицинской кибернетики в системе наук о человеке.
5. Какие математические методы и теории применяются в кибернетических исследованиях?
6. Перечислите типовые задачи биомедицинских приложений анализа сигналов.
8. В чем заключаются преимущества применения компьютерной техники для биомедицинских исследований.
9. Приведите примеры источников артефактов при использовании биомедицинской аппаратуры для съема сигналов

# Лекция 2. Основные понятия теории информации

## Определение информации

Понятие информации является одним из важнейших понятий при изучении свойств и механизмов функционирования любой биосистемы, поскольку управление происходящими в ней процессами базируется на информации, получаемой в результате обработки и анализа сигналов системы. При этом происходит обмен информацией между различными звеньями системы, системой и средой и т.п. В простых случаях это передача команд от управляющей системы к исполнительной, в более сложных – работа систем с ”обратной связью”, когда сигналы о выполнении команд передаются управляющей системе с целью анализа и принятия решений.

Можно выделить ряд задач, решение которых не связано с конкретным носителем сигнала, его формой, видом технического устройства. Одной из задач является *оценка характеристик канала связи* по передаче информации, его возможностей передачи сообщений без потерь и задержек. Другая задача связана с представлением сообщений в форме удобной для передачи по каналу связи — *задача преобразования сигналов*, т.е. отыскание наиболее экономных методов кодирования и дешифрации, построения помехозащищенных кодов.

Для решения подобных задач необходимо уметь оценивать информацию с количественной точки зрения: измерять количество информации в сообщении, величину потерь информации при передаче сообщений по каналу связи.

Само понятие информации, приемы и методы работы с ней пришли в кибернетику из теории связи. Основной математический аппарат — методы теории вероятностей, математической статистики, поскольку на всех этапах работы с информацией необходимо оценивать последствия эффектов случайности, приводящих к искажению информации при пе-

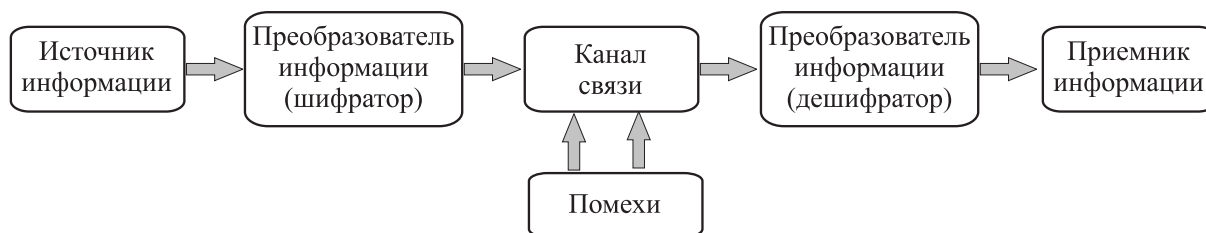


Рис. 4. Система передачи информации

редаче ее по каналам связи.

**Определение.** *Информацией* называется сообщение или совокупность сообщений, которые устраняют неопределенность состояния системы, существующую до их поступления.

Таким образом под информацией понимается не любое сообщение о состоянии изучаемой системы, а только то, которое уточняет наши знания о ней. Другими словами, для того чтобы сообщение содержало некоторую информацию о состоянии системы, наши знания о ней априорно должны быть неполными. Если в результате поступления некоторого сообщения неопределенность состояния системы не изменяется, то такое сообщение рассматривается, как информационный шум. Под дезинформацией понимаются сообщения увеличивающие неопределенность наших знаний о состоянии изучаемой системы.

В наиболее общем виде систему передачи информации можно представить следующим образом (рис. 4). Источник информации, обычно это изучаемая система, генерирует сигнал или совокупность сигналов, которые рассматриваются, как сообщение содержащее информацию о состоянии системы. Сигналы, генерируемые системой, преобразуются в сигналы которые можно передавать по каналу связи. Происходит кодирование информации, т.е. устанавливается соответствие между элементами исходных сообщений и сигналами, при помощи которых эти элементы хранятся, передаются и обрабатываются. Эти преобразования изменяют исходный сигнал в соответствии с принципами заложенными в основу применяемых устройств и видов каналов связи, а также с учетом способа помехозащищенности информации. Закодированный сигнал передается по каналу связи адресату. При передаче информации по каналу связи на информацию могут воздействовать помехи, которые искажают и снижают ее полезность. Дешифратор необходим для преобразования информации после прохождения ее по каналу связи, в форму доступную

приемнику сообщений. Под приемником сообщений может пониматься как устройство, предназначенное для долговременного хранения информации, так и устройство, предназначенное для анализа информации и принятия решений.

Следует различать *канал связи* – совокупность технических средств для передачи информации, и *линию связи* – среду в которой распространяются сигналы несущие информацию. Как правило по одной и той же линии связи информацию можно передавать по различным каналам.

## Количественная оценка информации

Любая система может находиться в одном из возможных своих состояний, характеризующихся некоторым набором параметров, позволяющих отличать одно состояние от другого. О том, в каком состоянии находится система, мы судим по сообщению передаваемому системой (т.е. по измеренным значениям сигналов). Очевидно, что различным состояниям системы должны соответствовать и различные сообщения, поэтому в дальнейшем мы будем отождествлять понятия "состояние системы" и "сообщение генерируемое системой" и пользоваться той терминологией которая более удобна в контексте изложения материала. С информационной точки зрения эквивалентными являются понятия "система" и "источник сообщений".

Любое сообщение в теории информации рассматривается, как некоторая совокупность сведений об изучаемой системе, которая уменьшает неопределенность ее состояния. Очевидно, что различные сообщения будут уменьшать эту неопределенность в большей или меньшей степени. Поэтому требуется ввести некоторую меру количества информации, содержащейся в конкретном сообщении или системе сообщений, а также способ ее измерения. Если система может находиться только в одном состоянии, то это равносильно тому, что нам заранее известно какой сигнал (сообщение) может поступить от нее. Следовательно такое сообщение не несет никакой информации, т.к. состояние системы априорно известно. Ценность сообщения будет тем выше, чем в большем числе возможных состояний система может находиться до посылки сообщения, т.е. чем больше будет исходная неопределенность состояния системы. Поэтому в количественную оценку информации содержащейся в сообщении должно быть включено, в качестве параметра, число различных сообщений  $N$

посылаемых системой (состояний, в которых может находиться система).

Пусть все состояния системы равновероятны

$$p_i = \frac{1}{N}, \quad i = \overline{1, N},$$

тогда количество информации содержащееся в каждом сообщении будет одно и то же. Обозначим его через  $I$ . Интуитивно ясно, что количественно оно должно быть тем больше, чем больше исходных состояний имеет система. С другой стороны, для нас абсолютно неважно, в каком физическом виде будут представлены сами передаваемые сигналы – важно только их разнообразие, поэтому количественно информация будет зависеть только от их числа:  $I = f(N)$ .

Использовать непосредственно число возможных сообщений  $N$  в качестве меры количества информации содержащейся в сообщении неудобно по следующим причинам.

1. Если  $N = 1$ , то сообщение содержит нулевое количество информации  $I = 0$ .
2. Если существуют два независимых источника сообщений, с числом сообщений  $N_1$  и  $N_2$ , то число сообщений генерируемых системой, объединяющей оба источника, будет равно  $N_1 \cdot N_2$ . Однако, количество информации поступающей от системы двух независимых источников сообщений должно удовлетворять условию аддитивности:  $I = I_1 + I_2$ .

Вышеперечисленным условиям удовлетворяет функция логарифма числа состояний (равновероятных) источника сообщений. Действительно, если в качестве количественной меры информации использовать выражение:

$$I = \log_a(N), \tag{1}$$

то нетрудно увидеть, что оно обладает всеми требованиями, предъявляемыми к количеству информации:

$$I = \log_a(1) = 0,$$

$$I = \log_a(N) = \log_a(N_1 \cdot N_2) = \log_a(N_1) + \log_a(N_2) = I_1 + I_2.$$

Основание логарифма в формуле (1) может быть выбрано любое, поскольку переход от логарифма по одному основанию к логарифму по другому основанию равносильен умножению на некоторый множитель,

что скажется только на выборе единицы измерения количества информации.

Рассмотрим источник сообщений, который может генерировать только два равновероятных взаимоисключающих сообщения, причем поступление каждого из которых полностью определяет состояние источника.

**Определение. 1 бит информации** — это количество информации получаемое в результате выяснения состояния системы состоящей из двух равновероятных состояний

Если в формуле (1) положить  $a = 2$ , то количество информации будет измеряться в битах<sup>1</sup>. Например, мы получаем количество информации равное одному биту, когда выясняем какой стороной подброшенная монетка упала на землю.

Разнообразие сигналов, которые может генерировать источник сообщений называется **алфавитом** источника сообщений (или первичным алфавитом). Это могут быть, например, сигналы различной длительности, амплитуды и т.п., в случае электрических сигналов; различные буквы, цифры в случае текстового сообщения; параметры, характеризующие состояние больного в случае диагностических сообщений (результатов процедур обследования).

Сообщение посылаемое источником состоит из последовательности символов алфавита. Если символы алфавита источника сообщений независимы и равновероятны, то общее число сообщений длиной  $n$  символов, в алфавите источника содержащем  $m$  символов (в алфавите с основанием  $m$ ) будет равно  $N = m^n$ . Все эти сообщения будут равновероятны. Поэтому количество информации содержащееся в сообщении длиной  $n$  символов можно определить следующим образом:

$$I = \log(N) = \log(m^n) = n \log(m). \quad (2)$$

Формула (2) носит название **формулы Хартли** (количества информации по Хартли) для оценки количества информации содержащейся в системе равновероятных сообщений длиной  $n$  символов в алфавите с основанием  $m$ .

Неравновероятное появление символов алфавита источника сообщений будет приводить к тому, что различные сообщения будут посылаться с различной вероятностью, а это в свою очередь будет приводить к

---

<sup>1</sup>В дальнейшем основание логарифма, если не оговорено особо, будем опускать и полагать его равным 2.



снижению общего количества информации содержащейся в системе сообщений. Действительно, если состояния системы (сообщения) неравновоятны, то у нас есть основания полагать, в каком из них система будет находиться более часто, т.е. соответствующее сообщение будет приходить чаще, чем остальные. С количественной точки зрения это соответствует передаче меньшего количества информации. Например, о требовательности преподавателя на зачете большее количество информации содержится в системе сообщений "сдал" - "не сдал", генерируемой троечником (т.к. вероятность сдачи и несдачи зачета приблизительно одинакова и существенно зависит от строгости преподавателя), по сравнению с той же системой сообщений генерируемой отличником (вероятность сдачи зачета намного выше по сравнению с несдачей и практически не зависит от строгости преподавателя).

Рассмотрим, как можно оценить количество информации содержащееся в системе неравновоятных сообщений. Пусть алфавит источника сообщений состоит из  $m$  символов  $x_1, x_2, \dots, x_m$ , с соответствующими вероятностями  $p_1, p_2, \dots, p_m$ . Генерация каждого символа не влияет на генерацию других символов (источник с независимым спектром сигналов) и они образуют полную группу, т.е. никаких других символов источник посылать не может  $\sum_{i=1}^m p_i = 1$ .

Пусть источником сообщений посылается сообщение длиной  $n$  символов. Обозначим через  $n_i$  количество символов  $x_i$ , содержащихся в сообщении:  $\sum_{i=1}^m n_i = n$ . Потребуем, чтобы длина сообщения была достаточно большая:  $n \gg m$ . В этом случае относительная частота встречаемости каждого символа алфавита в сообщении будет близка к вероятности генерации этого символа источником сообщений

$$p_i \approx \frac{n_i}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_i}{n}.$$

Оценим вероятность посылки такого сообщения  $P$ . В силу независимости появления символов в сообщении, она равна произведению вероятностей посылки символов сообщения:

$$P = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_m^{n_m} \approx p_1^{np_1} p_2^{np_2} \dots p_m^{np_m} = \prod_{i=1}^m p_i^{np_i}.$$

Видно, что все сообщения длиной  $n$  символов генерируемые источником сообщений будут приблизительно равновероятны, поэтому их количество  $N$  можно оценить следующим образом:  $N = 1/P$ .

Согласно (2), количество информации в случае равновероятных сообщений будет равно:

$$I = \log(N) = \log \left( \frac{1}{\prod_{i=1}^m p_i^{np_i}} \right) = -n \sum_{i=1}^m p_i \log(p_i). \quad (3)$$

Выражение (3) представляет собой **формулу Шеннона** для оценки количества информации, содержащееся в сообщении длиной  $n$  символов в случае неравновероятных сигналов источника сообщений (количество информации по Шеннону).

Количество информации приходящееся в среднем на один символ сообщения источника, алфавит которого составляет  $m$  символов, может быть оценено следующим образом:

$$\text{по Хартли:} \quad I = \frac{\log(N)}{n} = \log(m) \text{ бит/символ}; \quad (4)$$

$$\text{по Шеннону:} \quad I = - \sum_{i=1}^m p_i \log(p_i) \text{ бит/символ}. \quad (5)$$

Можно показать, что формула Хартли является частным случаем формулы Шеннона для случая равновероятных символов алфавита источника сообщений. Действительно, если  $p_i = p = \text{const}, i = \overline{1, m}$ , тогда  $p = 1/m$  и среднее количество информации будет равно:

$$I = - \sum_{i=1}^m \frac{1}{m} \log\left(\frac{1}{m}\right) = \frac{1}{m} \log(m) \sum_{i=1}^m 1 = \log(m).$$

Для анализа свойств количества информации и выполнения аналитических преобразований удобно представлять формулу Шеннона (при длине сообщения  $n = 1$ ) в виде математического ожидания функции  $-\log P(X)$ :

$$I(X) = \sum_{i=1}^m p_i (-\log(p_i)) = M(-\log P(X)), \quad (6)$$

где  $X$  - система сообщений  $x_1, x_2, \dots, x_m$ , рассматриваемая, как случайная величина с вероятностями ее значений  $p_1, p_2, \dots, p_m$ . Такое представление позволяет интерпретировать ее как количество информации содержащееся в среднем в сообщении единичной длины и позволяет привлекать

для анализа свойства, следующие из соответствующих теорем теории вероятностей. Величину  $-\log(p_i)$  можно рассматривать, как *количество информации содержащееся в сообщении  $x_i$* :

$$I(x_i) = -\log(p_i). \quad (7)$$

Видно, что количество информации содержащееся в сообщении тем больше, чем меньше априорная вероятность посылки этого сообщения. Если же все сообщения равновероятны, то частная информация содержащаяся в любом из сообщений совпадает со средним количеством информации, получаемым от системы.

## Энтропия системы и ее свойства

Каждое сообщение посылаемое источником сообщений содержит некоторое количество информации о состоянии изучаемой системы. Очевидно, что если бы состояние системы было известно, то было бы известно и какое сообщение она будет посылать. Другими словами, неопределенность ее состояния будет отсутствовать и посылаемое сообщение не будет содержать информации. Поэтому для возможности получения информации от системы (источника сообщений) она должна обладать некоторым внутренним свойством, характеризующим неопределенность ее состояния. Например, в физике, возможность системы совершать работу, связана с наличием у системы внутреннего свойства — энергии.

Причем, чем большая неопределенность исходно присуща системе, тем большее количество информации от нее можно будет получить. От чего может зависеть степень неопределенности состояния системы? Во первых — от числа состояний  $m$ , в которых может находиться система: чем их больше, тем труднее предвидеть в каком из состояний система находится. Во вторых — от вероятностей  $p_i$ , с которыми система может находиться в данных состояниях: если предпочтительнее какое-то из состояний системы, по сравнению со всеми остальными, то скорее всего система будет находиться именно в этом состоянии. Причем с точки зрения меры неопределенности состояния системы неважно, какие именно сообщения соответствуют каждому отдельному состоянию, важно лишь их разнообразие и вероятности нахождения системы в них.

Для оценки меры неопределенности состояния системы в теории информации используется специальная характеристика, называемая энтропией системы.

**Определение.** *Энтропией  $H(X)$  системы  $X$  называется сумма произведений вероятностей различных состояний системы на логарифмы этих вероятностей, взятая с обратным знаком:*

$$H(X) = - \sum_{i=1}^m p_i \log_a(p_i). \quad (8)$$

При выборе основания логарифма равного двум, энтропия измеряется в **битах**. Таким образом энтропией равной 1 биту обладает система, которая может находиться в одном из двух равновероятных состояний.

Нетрудно заметить тесную взаимосвязь энтропии  $H(X)$  и количества информации  $I$ . В результате получения информации от системы, ее неопределенность будет уменьшаться. Причем, чем больше исходная неопределенность состояния системы (т.е. энтропия системы) тем больший объем количества информации можно получить от системы и наоборот. Если в результате получения сообщения (информации) от системы, мы полностью смогли определить состояние системы, то это обозначает, что энтропия системы уменьшилась до нуля. Таким образом, количество информации, приобретаемое при полном определении состояния системы будет равно энтропии этой системы:

$$I = H(X). \quad (9)$$

Если сообщение посылаемое системой содержит  $n$  символов, то количество информации в нем и энтропия системы связаны следующим образом:

$$I = nH(X), \quad (10)$$

а энтропия источника сообщений  $H(X)$  равна среднему количеству информации системы приходящемуся на один символ сообщения

$$H(X) = \frac{I}{n}. \quad (11)$$

Рассмотрим *свойства энтропии*.

**1.** Если состояние системы определено, то энтропия системы равна нулю.

Пусть система может находиться в одном из  $m$  состояний с вероятностями  $p_i$ ,  $\sum_{i=1}^m p_i = 1$ . Если состояние системы известно, то это означает, что вероятность нахождения системы в некотором  $j$ -м состоянии равна 1, а вероятность всех остальных состояний равна нулю  $p_i = 0$ , ( $i \neq j$ ).

Подставляя такие значения вероятностей в формулу для вычисления энтропии (8) можно увидеть, что  $j$ -е слагаемое будет равно нулю:  $1 \cdot \log(1) = 0$ , а все остальные слагаемые представляют собой неопределенности вида:  $0 \cdot \log(0) = 0 \cdot (-\infty)$ . Воспользуемся правилом Лопиталья для их раскрытия:

$$\begin{aligned} \lim_{p_i \rightarrow 0} (-p_i \log(p_i)) &= \lim_{p_i \rightarrow 0} p_i \log\left(\frac{1}{p_i}\right) = \\ &= \lim_{p_i \rightarrow 0} \log\left(\frac{1}{p_i}\right) \Big/ \left(\frac{1}{p_i}\right) = \lim_{p_i \rightarrow 0} p_i \left(\frac{-1}{p_i^2}\right) \Big/ \left(\frac{-1}{p_i^2}\right) = \lim_{p_i \rightarrow 0} p_i = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

Таким образом, все слагаемые, входящие в энтропию системы, состояние которой определено, равны нулю.

2. Энтропия системы достигает максимума, когда все состояния системы равновероятны:  $H(X) \rightarrow \max$ , если  $p_i = p = \text{const}$ .

Пусть система  $X$  может находиться в любом из  $m$  состояний с вероятностями  $p_1, p_2, \dots, p_m$ . Энтропия такой системы может быть определена по формуле Шеннона (8). Найдем максимальное значение  $H(X)$  при условии  $\sum_{i=1}^m p_i = 1$ . Воспользуемся методом неопределенных множителей Лагранжа, т.е. будем искать безусловный экстремум функции:

$$L(p_1, p_2, \dots, p_m, \lambda) = - \sum_{i=1}^m p_i \log(p_i) + \lambda \left( \sum_{i=1}^m p_i - 1 \right). \quad (13)$$

Значения переменных, соответствующих экстремуму функции  $L$  можно определить из решения следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial p_1} = -\log(p_1) - \log(e) + \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial p_2} = -\log(p_2) - \log(e) + \lambda = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial L}{\partial p_m} = -\log(p_m) - \log(e) + \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^m p_i - 1 = 0 \end{cases} \quad (14)$$

Из решения первых  $m$  уравнений системы следует

$$\log(p_i) = -\log(e) + \lambda, \quad i = \overline{1, m}$$

Видно, что максимум энтропии достигается при равных значениях вероятностей всех состояний системы  $p_i = p$ . Подставляя их в последнее уравнение нетрудно убедиться, что вероятности состояний соответствующие максимуму энтропии будут равны  $p_i = p = 1/m$ , а максимум энтропии системы равен логарифму числа состояний  $H_{max} = \log(m)$ .

3. Энтропия системы  $Z$  состоящей из объединения двух независимых подсистем  $X$  и  $Y$  равна сумме энтропий этих подсистем

$$H(Z) = H(X) + H(Y). \quad (15)$$

Пусть подсистема  $X$  может находиться в состояниях  $x_1, x_2, \dots, x_m$  с вероятностями  $p_i, (i = \overline{1, m})$ , а подсистема  $Y$  состояниях  $y_1, y_2, \dots, y_n$  с вероятностями  $p_j, (j = \overline{1, n})$  соответственно. Рассмотрим систему  $Z$ , являющуюся объединением подсистем  $X$  и  $Y$ . Ее состояниями  $z_{ij}$  будут всевозможные комбинации состояний исходных подсистем  $x_i y_j$ , количество которых равно  $mn$ . В силу независимости подсистем:  $p_{ij} = p_i p_j$ , причем  $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_{ij} = 1$ . Вычислим энтропию системы  $Z$ :

$$\begin{aligned} H(Z) &= H(XY) = - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_{ij} \log(p_{ij}) = - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_i p_j \log(p_i p_j) \\ &= - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_i p_j \log(p_i) - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_i p_j \log(p_j) = \\ &= - \sum_{i=1}^m p_i \log(p_i) \underbrace{\sum_{j=1}^n p_j}_{=1} - \sum_{i=1}^m p_i \underbrace{\sum_{j=1}^n p_j}_{=1} \log(p_j) = H(X) + H(Y). \end{aligned} \quad (16)$$

Данное свойство обобщается на энтропию объединения произвольного числа независимых подсистем:

$$H(X_1, X_2, \dots, X_N) = \sum_{i=1}^N H(X_i). \quad (17)$$

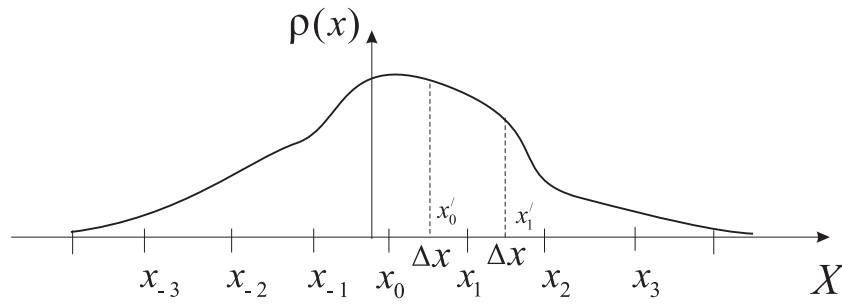


Рис. 5. К определению относительной энтропии

## Относительная энтропия

Ранее мы определили понятие энтропии для систем, в которых существенным образом учитывалась дискретность (счетность) сигналов вырабатываемых источником сообщений. В биомедицинских задачах многие источники сообщений характеризуются непрерывным спектром сигналов, в частности большинство сигналов снимаемых при обследовании пациента с использованием технических средств (ЭКГ, ЭЭГ и т.п.) являются аналоговыми, их величина может непрерывно изменяться в некотором диапазоне значений. Совокупность этих сигналов можно рассматривать, как непрерывную случайную величину. Интуитивно ясно, что энтропия такого источника должна быть равна бесконечности (в силу бесконечного числа различных его состояний). Рассмотрим, как можно оценить энтропию системы с непрерывным спектром сигналов.

Пусть  $X$  – непрерывная случайная величина, заданная на своем интервале определения функцией плотности распределения вероятности  $\rho(x)$ . Разобьем весь интервал определения на промежутки величиной  $\Delta x$  (рис. 5). Перейдем к дискретной величине  $X'$  следующим образом: пусть значения  $x'_i \in X'$ , принадлежат серединам интервалов  $[x_i, x_{i+1}]$ . Тогда вероятность различных значений дискретной случайной величины  $X'$  может быть приближенно выражена через функцию плотности  $\rho(x)$ :

$$p(x'_i) \approx \rho(x'_i)\Delta x,$$

а энтропия системы  $X'$  может быть определена обычным образом, по формуле для энтропии дискретной случайной величины:

$$H(X') = - \sum_{i=-\infty}^{\infty} p(x'_i \log(x'_i)).$$

Пусть  $\Delta x \rightarrow 0$ , тогда  $H(X') \rightarrow H(X)$ :

$$\begin{aligned}
H(X) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} H(X') \cong \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ - \sum_{i=-\infty}^{\infty} \rho(x'_i) \Delta x \log \rho(x'_i) \Delta x \right] = \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ - \sum_{i=-\infty}^{\infty} \rho(x'_i) \Delta x \log \rho(x'_i) \right] + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ - \sum_{i=-\infty}^{\infty} \rho(x'_i) \Delta x \log \Delta x \right] = \\
&= - \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) \log \rho(x) dx - \underbrace{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \log \Delta x}_{=-\infty} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) dx}_{=1} = \infty.
\end{aligned} \tag{18}$$

Таким образом, энтропия непрерывной случайной величины, вне зависимости от вида закона распределения всегда равна бесконечности. Поэтому возникает проблема сравнения информационных характеристик различных источников с непрерывным спектром сигналов. Видно, что бесконечность возникла за счет второго слагаемого в (18). Чтобы устранить эту трудность, рассмотрим непрерывную случайную величину  $X_0$ , равномерно распределенную в единичном интервале  $[a, b]$ . Функция распределения плотности вероятности такой величины имеет вид:

$$\rho(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{если } x \in [a, b], \\ 0, & \text{если } x \notin [a, b]. \end{cases} \tag{19}$$

Подставляя данную функцию плотности распределения вероятности в (18) получаем:

$$\begin{aligned}
H(X_0) &= -\frac{1}{b-a} \int_a^b \frac{1}{b-a} dx - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \log \Delta x = \\
&= \underbrace{\log(b-a)}_{=0} - \underbrace{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \log \Delta x}_{=-\infty} = \infty.
\end{aligned}$$

Сравнивая полученное выражение с (18) нетрудно заметить, что слагаемые, дающие бесконечный вклад в энтропию, в том и другом случае, идентичны и не зависят от вида распределения. Поэтому в качестве характеристики меры неопределенности случайной величины  $X$  рассматривают относительную энтропию.

**Определение.** *Относительной энтропией  $H_\varepsilon(X)$  непрерывной случайной величины  $X$  с законом распределения  $\rho(x)$  называется разность*



между ее энтропией  $H(X)$  и энтропией случайной величины, распределенной равномерно в единичном интервале:

$$H_\varepsilon(X) = H(X) - H_0(X) = - \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) \log \rho(x) dx, \quad (20)$$

Величина относительной энтропии принимает конечное значение, поэтому с ее помощью можно оценивать и сравнивать между собой информационные характеристики различных непрерывных случайных величин и непрерывных сигналов им соответствующих.

## Контрольные вопросы и задания

1. В соревновании участвуют 16 спортсменов. Вероятность победы каждого одинакова. Сколько информации содержится в сообщении о том, кто выиграл соревнование?

2. В составе 16 вагонов, среди которых К – купейные, П – плацкартные и СВ – спальные. Сообщение о том, что ваш друг приезжает в СВ несет 3 бита информации. Определите, сколько в поезде вагонов СВ.

3. Ученики класса, состоящего из 21 человека, изучают немецкий или французский языки. Сообщение о том, что ученик А изучает немецкий язык, несет  $\log_2 3$  бит информации. Сколько человек изучают французский язык?

4. Для записи письма был использован алфавит мощностью в 16 символов. Письмо состояло из 25 строк. В каждой строке вместе с пробелами было 64 символа. Сколько байт информации содержало письмо?

5. Письмо состояло из 30 строк. В каждой строке вместе с пробелами по 48 символов. Письмо содержало 900 байт информации. Какова мощность алфавита (количество символов), которым было написано письмо?

6. Для шифрования информации был использован код, состоящий из 64 различных знаков. Какое количество байт содержит шифровка, состоящая из 110 групп по 12 знаков в каждой группе?

7. Какое количество информации содержится в сообщениях о том, что телефонный номер а) заканчивается числом 47, б) начинается числом 47? В каком сообщении содержится больше информации и почему? Будет ли влиять длина телефонного номера на количество информации содержащееся в этих сообщениях?

8. Сколько информации содержится в сообщениях: а) "сегодня мой день рождения", б) "сегодня не день моего рождения"? в) Сколько информации содержится в ответе на вопрос о том, является ли текущий день Вашим днем рождения?

9. Вероятность получения студентом оценки "отлично", "хорошо", "удовл." и "неуд." составляет 0.3, 0.4, 0.2, 0.1 соответственно. Какое количество информации содержится в сообщении "студент сдал экзамен"?

10. Прием сигналов производится на два независимых приемника. Под правильным приемом понимается правильный прием сигнала обоими приемниками одновременно. Правильный прием сигнала осуществляется с вероятностями 0.8 и 0.9 независимо каждым приемником. Сколько информации содержится в сообщении "неправильно принятый сигнал"?

11. По каналу связи передается пятиразрядная кодовая комбинация. Вероятность искажения любого символа 0.1. Какое количество информации содержится в сообщениях: а) "информация принята правильно", б) "искажен один символ в сообщении"?

12. Сигналы  $x_1, x_2, x_3$  передаются источником сообщений со следующими вероятностями 0.2, 0.3, 0.5. Определить энтропию источника сообщений, количество информации содержащееся в каждом сигнале и количество информации содержащееся в сообщении длиной 10 сигналов.

13. Оценить энтропию системы, являющейся результатом проведения двух независимых экспериментов. Вероятность успеха в первом эксперименте равна 0.7, а во втором 0.9.

14. Оценить верхнюю границу чувствительности слухового анализатора (максимальное количество информации в сек). Диапазон воспринимаемых частот 20 Гц - 20 кГц (10 октав). В октаве можно различить до 12 тонов. От порога слышимости до болевого порога 250 ступеней. В секунду слуховой анализатор может различать 10 тонов.

15. Оценить верхнюю границу чувствительности зрительного анализатора. В сетчатке  $10^7$  светочувствительных рецепторов. Каждый рецептор дает специфическую реакцию от порога видимости до болевого порога – 100 градаций. Время реакции на зрительный образ 0,1 сек. Какие информативные возможности зрительного анализатора не учитываются при такой оценке? 16. При измерении нормально распределенной случайной величины  $X$  получен следующий ряд значений: 5; 4; 4; 7; 6; 5; 3. Определить относительную энтропию величины  $X$ .

# Лекция 3. Энтропия взаимосвязанных систем

## Условная энтропия

Если изучаемая система представляет собой объединение взаимозависимых (взаимосвязанных) между собой подсистем, то простое сложение их энтропий уже не применимо. Действительно, в силу взаимосвязи между подсистемами, информация о том, в каком состоянии находится одна из подсистем позволяет нам более определенно судить, как о состоянии второй подсистемы, так и о состоянии всей системы в целом. Следовательно, энтропия всей системы будет меньше, чем сумма соответствующих энтропий подсистем. Для характеристики меры неопределенности взаимосвязанных систем вводится понятие условной энтропии.

Пусть имеются две зависимые системы  $X$  и  $Y$  характеризующиеся состояниями  $x_1, x_2, \dots, x_m$  и  $y_1, y_2, \dots, y_n$  с вероятностями  $p_i, (i = \overline{1, m})$ , и  $p_j, (j = \overline{1, n})$ , соответственно. Предположим, что система  $X$  находится в состоянии  $x_i$ . Поскольку системы взаимосвязаны, то вероятность нахождения системы  $Y$  в состоянии  $y_j$  будет зависеть от того состояния  $x_i$ , в котором находится подсистема  $X$ . Она определяется условной вероятностью  $p(y_j/x_i)$  состояния  $y_j$ , при условии, что система  $X$  находится в состоянии  $x_i$ . Очевидно, что  $\sum_{j=1}^n p(y_j/x_i) = 1$ . Если неважно в каком состоянии находится система  $X$ , то безусловную вероятность нахождения системы  $Y$  в состоянии  $y_j$  можно вычислить по формуле полной вероятности:

$$p(y_j) = \sum_{i=1}^m p(x_i)p(y_j/x_i). \quad (21)$$

Энтропия системы  $Y$ , при условии что система  $X$  находится в состоянии  $x_i$  называется *частной условной энтропией* системы  $Y$  отно-

сительно состояния  $x_i$ :

$$H(Y/x_i) = - \sum_{j=1}^n p(y_j/x_i) \log(p(y_j/x_i)). \quad (22)$$

Она зависит от того, в каком из состояний  $x_i$  будет находиться система  $X$ , поэтому можно найти среднее значение условной энтропии системы  $Y$  относительно системы  $X$  усреднив ее по всем состояниям  $x_i$ :

$$H(Y/X) = - \sum_{i=1}^m p(x_i) \sum_{j=1}^n p(y_j/x_i) \log(p(y_j/x_i)). \quad (23)$$

Выражение (23) называется **условной энтропией** системы  $Y$  относительно системы  $X$ . Она характеризует среднюю неопределенность состояния системы  $Y$ , при условии, что состояние системы  $X$  полностью определено. Внося  $p(x_i)$  под знак суммы и учитывая, что  $p(x_i)p(y_j/x_i) = p(x_i, y_j)$ , условную энтропию можно представить в виде:

$$H(Y/X) = - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p(x_i, y_j) \log(p(y_j/x_i)). \quad (24)$$

Аналогично можно определить  $H(X/y_j)$  – частную условную энтропию системы  $X$  относительно состояния  $y_j$  и  $H(X/Y)$  – полную условную энтропию системы  $X$  относительно системы  $Y$ :

$$H(X/y_j) = - \sum_{i=1}^m p(x_i/y_j) \log(p(x_i/y_j)), \quad (25)$$

$$\begin{aligned} H(X/Y) &= - \sum_{j=1}^n p(y_j) \sum_{i=1}^m p(x_i/y_j) \log(p(x_i/y_j)) = \\ &= - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p(x_i, y_j) \log(p(x_i/y_j)), \end{aligned} \quad (26)$$

которые характеризуют степень неопределенности системы  $X$  относительно системы  $Y$ .

В случае источников с непрерывным спектром сигналов аналогично можно определить **относительную условную энтропию** непрерывной случайной величины  $Y$  относительно  $X$ :

$$H_\varepsilon(Y/X) = - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x, y) \log \rho(y/x) dx dy, \quad (27)$$

и относительную условную энтропию случайной величины  $X$  относительно  $Y$ :

$$H_\varepsilon(X/Y) = - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x, y) \log \rho(x/y) dx dy, \quad (28)$$

где  $\rho(x, y)$  – двумерная функция распределения плотности вероятности,  $\rho(x/y)$ ,  $\rho(y/x)$  – условные функции распределения плотности вероятности случайной величины.

## Энтропия объединения систем

Рассмотрим системы  $X$  и  $Y$ , как подсистемы некоторой объединенной системы  $Z$ . Ее состояния  $z_{ij}$  определяются произведениями всевозможных состояний подсистем  $x_i$  и  $y_j$ , ( $i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$ ) и соответствующими им вероятностям  $p(x_i, y_j)$ , поэтому можно определить **энтропию объединения** систем  $(X, Y)$ :

$$H(X, Y) = - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p(x_i, y_j) \log(p(x_i, y_j)). \quad (29)$$

Можно показать, что энтропия объединения двух подсистем равна безусловной энтропии одной из них плюс условной энтропий другой подсистемы относительно первой.

$$H(X, Y) = H(X) + H(Y/X) = H(Y) + H(X/Y). \quad (30)$$

Докажем первое равенство:

$$\begin{aligned}
H(X, Y) &= - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p(x_i, y_j) \log(p(x_i, y_j)) = \\
&= - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p(x_i) p(y_j/x_i) \log(p(x_i) p(y_j/x_i)) = \\
&= - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p(x_i) p(y_j/x_i) \log(p(x_i)) - \\
&\quad - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p(x_i) p(y_j/x_i) \log(p(y_j/x_i)) = \\
&= - \sum_{i=1}^m p(x_i) \log(p(x_i)) \underbrace{\sum_{j=1}^n p(y_j/x_i)}_{=1} - \\
&\quad - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p(x_i) p(y_j/x_i) \log(p(y_j/x_i)) = H(X) + H(Y/X).
\end{aligned}$$

Данное утверждение может быть обобщено на случай объединения произвольного числа взаимозависимых подсистем  $X_k$ , ( $k = \overline{1, m}$ ):

$$\begin{aligned}
H(X_1, X_2, \dots, X_M) &= H(X_1) + H(X_2/X_1) + H(X_3/X_1, X_2) + \\
&\quad + \dots + H(X_m/X_1, X_2, \dots, X_{m-1}).
\end{aligned} \tag{31}$$

В частном случае, когда подсистемы  $X$  и  $Y$  независимы, т.е. условная вероятность какого либо состояния одной системы равна безусловной вероятности этого состояния  $p(x_i/y_j) = p(x_i)$  и  $p(y_j/x_i) = p(y_j)$ , то условная энтропия подсистемы совпадает с ее безусловной энтропией:

$$\begin{aligned}
H(X/Y) &= - \sum_{j=1}^n p(y_j) \sum_{i=1}^m p(x_i/y_j) \log(p(x_i/y_j)) = \\
&= - \sum_{j=1}^n p(y_j) \sum_{i=1}^m p(x_i) \log(p(x_i)) = H(X),
\end{aligned} \tag{32}$$

а энтропия объединения двух подсистем будет равна сумме безусловных энтропий этих подсистем:

$$H(X, Y) = H(X) + H(Y). \tag{33}$$

Рассмотрим другой частный случай, когда состояние одной подсистемы полностью определяет состояние другой, т.е. между подсистемами существует функциональная (детерминированная) связь. Если подсистема  $Y$  находится в состоянии  $y_k$ , то это обозначает, что мы можем с вероятностью 1 указать в каком состоянии  $x_i$  находится подсистема  $X$ :

$$p(x_i/y_j) = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases} . \quad (34)$$

В этом случае условная энтропия одной подсистемы относительно другой равна нулю:

$$\begin{aligned} H(X/Y) &= - \sum_{j=1}^n p(y_j) \sum_{i=1}^m p(x_i/y_j) \log(p(x_i/y_j)) = \\ &= - \underbrace{\sum_{j=1}^n p(y_j)}_{=1} \underbrace{[0 \cdot \log(0) + \dots + 1 \cdot \log(1) + \dots + 0 \cdot \log(0)]}_{=0} = 0, \end{aligned}$$

а энтропия объединения двух подсистем совпадает с безусловной энтропией каждой из подсистем (такие подсистемы называются **эквивалентными**):

$$H(X, Y) = H(X) = H(Y). \quad (35)$$

В любом промежуточном случае, когда между подсистемами наблюдается статистическая зависимость, условная энтропия не может превышать безусловную энтропию:

$$H(X/Y) \leq H(X), \quad H(Y/X) \leq H(Y), \quad (36)$$

а энтропия объединения не превышает суммы энтропий подсистем:

$$H(X, Y) \leq H(X) + H(Y). \quad (37)$$

Все свойства энтропии, полученные ранее для дискретных источников сообщений, можно аналогичным образом записать и для относительной энтропии источников с непрерывным спектром сигналов.

**Относительная энтропия объединения** непрерывных случайных величин  $X$  и  $Y$  имеет вид:

$$H_\varepsilon(X, Y) = - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x, y) \log \rho(x, y) dx dy, \quad (38)$$

где  $\rho(x, y)$  – двумерная функция распределения плотности вероятности.

Относительная энтропия системы двух непрерывных случайных величин равна сумме относительной энтропии одной величины и условной относительной энтропии другой и наоборот:

$$H_\varepsilon(X, Y) = H_\varepsilon(X) + H_\varepsilon(Y/X) = H_\varepsilon(Y) + H_\varepsilon(X/Y). \quad (39)$$

Относительная энтропия системы двух непрерывных случайных величин не превышает суммы относительных энтропии этих величин, причем равенство возможно только в случае если случайные величины независимы:

$$H_\varepsilon(X, Y) \leq H_\varepsilon(X) + H_\varepsilon(Y). \quad (40)$$

## Энтропия эргодических источников сообщений

Пусть имеется источник сообщений, генерирующий символы  $x_1, x_2, \dots, x_n$  с вероятностями  $p(x_i), i = \overline{1, n}$ . Если между символами алфавита источника имеется взаимосвязь, то последовательность символов сгенерированных источником сообщений, будет определять вероятность появления последующего символа  $x_j p(x_j/x_i, \dots, x_k)$ . В качестве примера такой ситуации можно рассматривать появление букв в предложении. Источником сообщений является некоторый осмысленный текст. Алфавит источника (количество различных символов) определяется языком на котором написан текст. Очевидно, что вероятность появления каждой буквы зависит от того, какая буква (или несколько букв) были перед ней. В частности, в русском языке вероятность появления мягкого или твердого знака будет различной после появления гласных или согласных букв (в частности, после гласной буквы она равна нулю). Точно также вероятность появления в тексте двух одинаковых букв подряд существенно меньше, чем двух различных. Видно, что вероятность  $p(x_j)$  символа  $x_j$  не является постоянной для заданного алфавита  $x_1, x_2, \dots, x_n$  эргодического источника, а зависит от того какие  $r$  символов и в какой последовательности были сгенерированы последними. В этом случае использовать непосредственно формулу Шеннона, для оценки энтропии таких систем, нельзя.

**Определение.** *Состоянием эргодического источника сообщений называется последовательность символов, влияющих на вероятность появления последующего символа.*



**Определение.** *Эргодическим источником  $r$ -го порядка* называется источник сообщений у которого вероятность появления некоторого символа  $x_j$  зависит только от последовательности появления  $r$  предыдущих символов:

$$p(x_j/x_i^{(1)}, x_k^{(2)}, \dots, x_l^{(r)}) = p(x_j/x_i^{(1)}, x_k^{(2)}, \dots, x_l^{(r)}, x_m^{(r+1)}). \quad (41)$$

Количество различных состояний эргодического источника  $r$ -го порядка будет равно  $m = n^r$ .

Пусть  $P(S_k)$  – вероятность того, что источник сообщений находился в состоянии  $S_k$ . Очевидно, что  $\sum_{k=1}^m P(S_k) = 1$ . Выработав некоторый символ, источник перешел в состояние  $S_l$ . У нас имеется неопределенность связанная с тем, из какого состояния  $S_k$  он перешел в данное состояние. Обозначим через  $P(S_l/S_k)$  вероятность состояния  $S_l$ , при условии, что источник находился в состоянии  $S_k$ . Тогда энтропия источника в состоянии  $S_k$  может быть определена следующим образом:

$$H(S_k) = - \sum_{l/k} P(S_l/S_k) \log P(S_l/S_k), \quad (42)$$

где  $\sum_{l/k}$  обозначает суммирование по всевозможным переходам из состояний  $S_k$  в состояние  $S_l$ .

Энтропия эргодического источника определяется, как результат усреднения по всевозможным состояниям  $S_k$ :

$$\begin{aligned} H(X) &= \sum_{k=1}^m P(S_k) H(S_k) = - \sum_{k=1}^m \sum_{l/k} P(S_k) P(S_l/S_k) \log P(S_l/S_k) = \\ &= - \sum_{k=1}^m \sum_{l/k} P(S_k, S_l) \log P(S_l/S_k). \end{aligned} \quad (43)$$

Получим выражения для энтропии эргодических источников разных порядков через условные вероятности генерации символов источников.

**Эргодический источник 0-го порядка.** Вероятностные связи между символами алфавита отсутствуют:  $p(x_j/x_i^{(1)}, x_k^{(2)}, \dots, x_l^{(r)}) = p(x_j)$ . Поскольку предистория (т.е. предыдущий символ сгенерированный источником) не влияет на вероятность генерации последующего символа  $x_j$ , то у источника имеется только одно состояние  $S_0$ , вероятность которого  $P(S_0) = 1$ ,  $m = 1$ . При генерации любого символа

$x_i$ , источник переходит в тоже самое состояние  $S_0$ . Условная вероятность такого перехода определяется безусловной вероятностью генерации символа  $x_i$ :  $P(S_0/S_0) = p(x_i)$ , а суммирование по всем переходам  $\sum_{l/k} \rightarrow \sum_{i=1}^n$ . Подставляя вероятности состояний эргодического источника 0-го порядка в формулу (143) получаем:

$$\begin{aligned} H_0(X) &= - \sum_{k=1}^1 \sum_{l/k} P(S_0)P(S_0/S_0) \log P(S_0/S_0) = \\ &= - \sum_{i=1}^n p(x_i) \log p(x_i), \end{aligned} \quad (44)$$

т.е. энтропия эргодического источника 0-го порядка рассчитывается по обычной формуле для энтропии системы с независимыми сигналами.

**Эргодический источник 1-го порядка.** Пусть на вероятность генерации любого символа  $x_j$  влияет только то, какой символ был сгенерирован предыдущим (т.е. учитываются связи между парами символов):  $p(x_j/x_i^{(1)}, x_k^{(2)}, \dots, x_l^{(r)}) = p(x_j/x_i)$ . Такой источник имеет  $m = n$  состояний. Условная вероятность генерации символа  $x_j$  будет определяться состояниями:

$$\begin{aligned} S_1, & \text{ если предыдущий символ был } x_1; \\ S_2, & \text{ если предыдущий символ был } x_2; \\ \dots & \\ S_n, & \text{ если предыдущий символ был } x_n. \end{aligned}$$

В этом случае вероятности состояний эргодического источника выражаются через вероятности генерации символов следующим образом:

$$P(S_k) = p(x_i), \quad P(S_l/S_k) = p(x_j/x_i),$$

а соответствующие суммы по состояниям имеют вид:  $\sum_{k=1}^m \rightarrow \sum_{i=1}^n$ ,

$$\sum_{l/k} \rightarrow \sum_{j=1}^n.$$

Таким образом энтропия эргодического источника 1-го порядка мо-

жет быть вычислена по формуле:

$$\begin{aligned}
H_1(X) &= - \sum_{k=1}^m \sum_{l/k} P(S_k) P(S_l/S_k) \log P(S_l/S_k) = \\
&= - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p(x_i) p(x_j/x_i) \log p(x_j/x_i) = \\
&= - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p(x_i, x_j) \log p(x_j/x_i).
\end{aligned} \tag{45}$$

**Эргодический источник 2-го порядка.** Вероятность генерации любого символа определяется последовательностью генерации двух предыдущих символов  $p(x_j/x_i^{(1)}, x_k^{(2)}, \dots, x_l^{(r)}) = p(x_j/x_i, x_h)$ . Количество состояний такого источника определяется числом всевозможных пар символов  $x_i x_h$ , т.е.  $m = n^2$ . Обозначим  $S_k \equiv S_{h,i}$  состояние источника определяемое последовательностью генерации символов  $x_h$  и  $x_i$ , причем символ  $x_h$  был сгенерирован ранее символа  $x_i$ . После генерации символа  $x_j$ , источник перейдет в состояние  $S_l \equiv S_{i,j}$ . Тогда:

$$P(S_k) = p(x_h, x_i), \quad P(S_l/S_k) = P(S_{i,j}/S_{h,i}) = p(x_j/x_h, x_i),$$

а соответствующие суммы:  $\sum_{k=1}^m \rightarrow \sum_{i=1}^n \sum_{h=1}^n$  и  $\sum_{l/k} \rightarrow \sum_{j=1}^n$  (обратите внимание, что не между всеми состояниями источника возможны переходы). После подстановки в (143) получим, что энтропия эргодического источника 2-го порядка имеет вид:

$$\begin{aligned}
H_2(X) &= - \sum_{k=1}^m \sum_{l/k} P(S_k) P(S_l/S_k) \log P(S_l/S_k) = \\
&= - \sum_{i=1}^n \sum_{h=1}^n \sum_{j=1}^n p(x_h, x_i) p(x_j/x_h, x_i) \log p(x_j/x_h, x_i) = \\
&= - \sum_{i=1}^n \sum_{h=1}^n \sum_{j=1}^n p(x_h, x_i, x_j) \log p(x_j/x_h, x_i).
\end{aligned} \tag{46}$$

Аналогично выводятся формулы для энтропии эргодических источников более высоких порядков. Например для источника 3-го порядка справед-

лива формула:

$$H_3(X) = - \sum_{i=1}^n \sum_{h=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{g=1}^n p(x_h, x_i, x_j, x_g) \log p(x_g/x_j, x_h, x_i). \quad (47)$$

Эргодичность источника сообщений приводит к тому, что энтропия такого источника будет меньше, по сравнению с источником с независимыми символами, поскольку в результате взаимосвязи символов появляется возможность с большей степенью надежности предсказывать появление того или иного символа по известной предыстории.

Последовательности сигналов, вырабатываемые эргодическим источником сообщений обладают рядом интересных свойств, являющихся следствием следующей теоремы, приводимой ниже без доказательства.

**Теорема об эргодических последовательностях.** Для любых

$\varepsilon > 0$  и  $\delta > 0$  можно найти такое число  $M_0$ , при котором эргодические последовательности  $C$ , вырабатываемые эргодическим источником сообщений, длиной  $M > M_0$  распадаются на два класса:

- 1) нетипичные, сумма вероятностей которых меньше  $\varepsilon$ ;
- 2) типичные, вероятности которых удовлетворяют неравенству:

$$\left| H(X) - \frac{1}{M} \log \left( \frac{1}{P(C)} \right) \right| < \delta. \quad (48)$$

Следствием этой теоремы являются два свойства типичных последовательностей эргодических источников.

**Свойство 1.** Все типичные последовательности достаточно большой длины, вырабатываемые эргодическим источником сообщений, приблизительно равновероятны.

Действительно, из (48) следует, что вероятность типичной последовательности будет удовлетворять следующему двойному неравенству:

$$2^{-M(H(X)+\delta)} < P(C) < 2^{-M(H(X)-\delta)}$$

При увеличении длины последовательности пределы левой и правой частей стремятся к одной и той же величине:

$$P(C) = \lim_{M \rightarrow \infty (\delta \rightarrow 0)} 2^{-M(H(X) \pm \delta)} = 2^{-MH(X)}. \quad (49)$$

Откуда видно, что вероятность реализации любой типичной эргодической последовательности (достаточно длинной) определяется только ее длиной  $M$  и энтропией эргодического источника  $H(X)$ .

**Свойство 2.** При большом  $M$  количество типичных последовательностей ничтожно мало по сравнению с общим количеством последовательностей, вырабатываемых эргодическим источником.

Согласно первому следствию, общее количество типичных последовательностей длиной  $M$  можно подсчитать по формуле:

$$N_T = \frac{1}{P(C)} \approx 2^{MH(X)}, \quad (50)$$

а общее число всевозможных последовательностей, которые может вырабатывать эргодический источник, равно  $N_0 = n^M = [2^{\log_2 n}]^M$ . Вычислим предел:

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{N_T}{N_0} = \lim_{M \rightarrow \infty} 2^{M[H(X) - \log_2 n]}. \quad (51)$$

Так как источник эргодический, то  $H(X) < \log_2 n = H_{max}$  и, следовательно,

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{N_T}{N_0} = 0.$$

Таким образом, хотя типичных последовательностей бесконечно мало по сравнению с общим числом последовательностей вырабатываемых эргодическим источником, именно они в основном и вырабатываются. Причем вероятность любой типичной приблизительно одинакова. Отсюда следует, в частности, что частотные свойства букв любого алфавита можно изучать основываясь на достаточно длинных текстах, независимо от того к какой области (технический текст, по искусству, художественный и т.п.) они относятся. Любой такой текст можно рассматривать как пример типичной последовательности (нетипичной последовательностью может быть, например, текст состоящий из повторения только одной буквы).

## Относительная энтропия в случае нормального закона распределения

Получим выражение для относительной энтропии одномерной непрерывной случайной величины  $X$ , распределенной по нормальному закону. Функция распределения плотности вероятности случайной величины, распределенной по нормальному закону с дисперсией  $\sigma^2$  и нулевым



4. Энтропия эргодического источника сообщений равна 0.3 бита. Оценить количество типичных последовательностей длиной 50 символов вырабатываемых источником.

# Лекция 4. Информационное описание систем передачи информации

## Информационная модель канала связи

Рассмотрим описание канала связи с информационной стороны. Нам не будет интересовать ни физическое представление передаваемого сигнала, ни техническая реализация устройства (канала связи) для передачи сигналов.

Общая *информационная модель канала связи* представляет собой статистическую систему, для описания которой используются следующие наборы вероятностных характеристики:

- набор входных состояний  $x_1, x_2, \dots, x_m$ , соответствующих сигналам источника сообщений  $X$ , и вероятности  $p(x_1), p(x_2), \dots, p(x_m)$  этих состояний, равные вероятностям генерации соответствующих сигналов источником сообщений;
- набор выходных состояний  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , соответствующих сигналам, принимаемым приемником  $Y$  и вероятности  $p(y_1), p(y_2), \dots, p(y_n)$  приема этих сигналов;
- набор условных вероятностей  $p(y_j/x_i)$ , характеризующих вероятности появления сигнала  $y_j$  на выходе канала связи (входе приемника), при условии посылки сигнала  $x_i$  источником сообщений;
- набор условных вероятностей  $p(x_i/y_j)$ , характеризующих вероятности посылки сигнала  $x_i$  источником, при условии получения сигнала  $y_j$  приемником;
- набор вероятностей  $p(x_i, y_j)$ , характеризующих вероятности совместного появления сигнала  $x_i$  на входе и сигнала  $y_j$  на выходе канала связи.



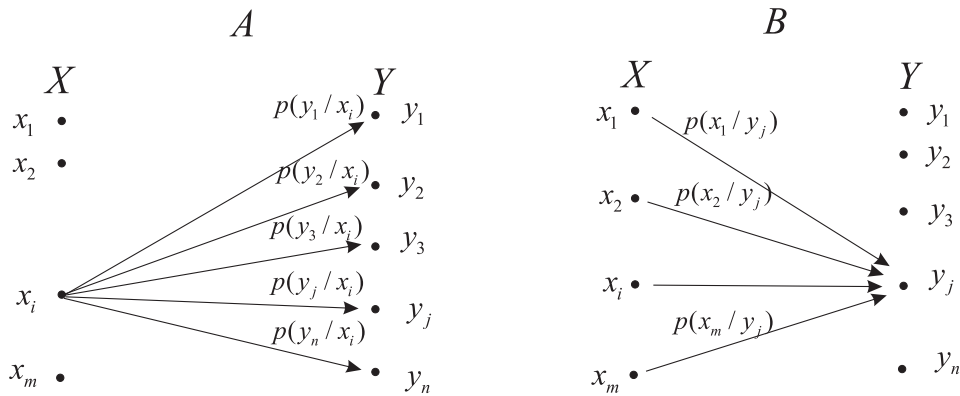


Рис. 6. Вероятностное описание канала связи. А - со стороны источника сообщений, В - со стороны приемника сообщений

Количество входных и выходных сигналов не обязательно должно быть одинаково. Например, различным входным сигналам может соответствовать один и тот же выходной.

Если в канале связи имеются помехи, то каждому посланному источником сигналу  $x_i$  будет соответствовать (рис. 6-А) некоторое распределение вероятностей сигналов полученных приемником  $p(Y/x_i)$ , вид которого будет определяться величиной искажений сигналов  $x_i$  при передаче их по каналу связи. Таким образом, можно охарактеризовать канал связи со стороны источника сообщений, посылая известный сигнал  $x_i$  и анализируя распределение сигналов полученных приемником. Удобно эти вероятности записывать в виде матрицы:

**Определение.** *Канальной матрицей источника  $P(Y/X)$  называется матрица, на пересечении  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца которой расположены условные вероятности получения приемником сигнала  $y_j$  при условии посылки источником сигнала  $x_i$ .*

$$P(Y/X) = \begin{pmatrix} p(y_1/x_1) & p(y_2/x_1) & \dots & p(y_j/x_1) & \dots & p(y_n/x_1) \\ p(y_1/x_2) & p(y_2/x_2) & \dots & p(y_j/x_2) & \dots & p(y_n/x_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p(y_1/x_i) & p(y_2/x_i) & \dots & p(y_j/x_i) & \dots & p(y_n/x_i) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p(y_1/x_m) & p(y_2/x_m) & \dots & p(y_j/x_m) & \dots & p(y_n/x_m) \end{pmatrix} \quad (53)$$

Элементы канальной матрицы источника обладают следующими свойствами:

$$\text{для любой строки } \sum_{j=1}^n p(y_j/x_i) = 1,$$

для любого столбца  $\sum_{i=1}^m p(x_i)p(y_j/x_i) = p(y_j)$ .

Очевидно, что характеризовать помехи в канале связи можно и со стороны приемника сообщений, оценивая вероятности посылки сигналов  $x_i$ , при условии, что известно, какой сигнал  $y_j$  получен приемником (рис. 6-В). Матрица  $P(X/Y)$  условных вероятностей  $p(x_i/y_j)$  называется канальной матрицей приемника.

**Определение.** *Канальной матрицей приемника называется матрица, на пересечении  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца которой расположены вероятности посылки источником сигнала  $x_i$ , при условии получения приемником сигнала  $y_j$ :*

$$P(X/Y) = \begin{pmatrix} p(x_1/y_1) & p(x_1/y_2) & \dots & p(x_1/y_j) & \dots & p(x_1/y_n) \\ p(x_2/y_1) & p(x_2/y_2) & \dots & p(x_2/y_j) & \dots & p(x_2/y_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p(x_i/y_1) & p(x_i/y_2) & \dots & p(x_i/y_j) & \dots & p(x_i/y_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p(x_m/y_1) & p(x_m/y_2) & \dots & p(x_m/y_j) & \dots & p(x_m/y_n) \end{pmatrix}, \quad (54)$$

причем,  $\sum_{i=1}^m p(x_i/y_j) = 1$ ,  $\sum_{j=1}^n p(y_j)p(x_i/y_j) = p(x_i)$ .

Аналогично можно определить канальную матрицу объединения.

**Определение.** *Канальной матрицей объединения  $P(X, Y)$  называется матрица, на пересечении  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца которой расположены вероятности совместного появления пар – посланный сигнал  $x_i$  и принятый сигнал  $y_j$ :*

$$P(X, Y) = \begin{pmatrix} p(x_1, y_1) & p(x_1, y_2) & \dots & p(x_1, y_j) & \dots & p(x_1, y_n) \\ p(x_2, y_1) & p(x_2, y_2) & \dots & p(x_2, y_j) & \dots & p(x_2, y_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p(x_i, y_1) & p(x_i, y_2) & \dots & p(x_i, y_j) & \dots & p(x_i, y_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p(x_m, y_1) & p(x_m, y_2) & \dots & p(x_m, y_j) & \dots & p(x_m, y_n) \end{pmatrix}. \quad (55)$$

Элементы канальной матрицы объединения обладают следующими свойствами:

$$\sum_{i=1}^m p(x_i, y_j) = p(y_j), \quad \sum_{j=1}^n p(x_i, y_j) = p(x_i), \quad \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p(x_i, y_j) = 1.$$

Считается, что канал связи **полностью описан в информационном смысле**, если известны все его энтропийные характеристики:  $H(X)$

– энтропия источника,  $H(Y)$  – энтропия приемника,  $H(Y/X)$ ,  $H(X/Y)$   
 – условные энтропии источника и приемника,  $H(X, Y)$  – энтропия объединения.

**Определение.** *Информационно полным набором характеристик произвольного канала связи называется такой набор, из которого с помощью алгебраических преобразований можно получить любую энтропийную характеристику канала связи.*

Для нахождения энтропийных характеристик нет необходимости знать все вышеперечисленные каналные матрицы и вероятности. Следующая теорема определяет информационно полные наборы характеристик канала связи.

**Теорема (об информационно полном наборе).** Информационно полными наборами характеристик канала связи, являются:

1.  $p(x_i)$  – вероятности появления сигналов на входе канала связи и  $P(Y/X)$  – канальная матрица источника;
2.  $p(y_j)$  – вероятности появления сигналов выходе канала связи и  $P(X/Y)$  – канальная матрица приемника;
3.  $P(X, Y)$  – канальная матрица объединения

Докажем теорему (для случая 3). Для доказательства нужно выразить все энтропийные характеристики через элементы канальной матрицы объединения  $p(x_i, y_j)$ . Энтропия объединения выражается через  $p(x_i, y_j)$  непосредственно по определению. Суммируя, элементы канальной матрицы объединения соответственно по строкам и столбцам и подставляя их в безусловные энтропии источника и приемника, получим:

$$H(X) = - \sum_{i=1}^m p(x_i) \log p(x_i) = - \sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^n p(x_i, y_j) \right) \log \left( \sum_{j=1}^n p(x_i, y_j) \right),$$

$$H(Y) = - \sum_{j=1}^n p(y_j) \log p(y_j) = - \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^m p(x_i, y_j) \right) \log \left( \sum_{i=1}^m p(x_i, y_j) \right).$$

Чтобы выразить условные вероятности  $p(x_i/y_j)$  и  $p(y_j/x_i)$  через  $p(x_i, y_j)$ , входящие в выражения для  $H(X/Y)$  и  $H(Y/X)$ , воспользуемся соотношениями, известными из теории вероятностей:

$$p(x_i, y_j) = p(x_i)p(y_j/x_i) = p(y_j)p(x_i/y_j).$$

Откуда:

$$p(y_j/x_i) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(x_i)} = \frac{p(x_i, y_j)}{\sum_{j=1}^n p(x_i, y_j)},$$
$$p(x_i/y_j) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(y_j)} = \frac{p(x_i, y_j)}{\sum_{i=1}^m p(x_i, y_j)}.$$

Таким образом, действительно, канальная матрица объединения является информационно полным набором характеристик канала связи. Аналогично доказываются и два оставшихся случая.

## Количество информации при передаче по каналу связи с помехами

Если в канале связи присутствуют помехи, то в результате их воздействия могут происходить случайные искажения сигналов посланных источником. Пусть помехи таковы, что происходит замена посланного сигнала на другой из того же алфавита источника  $x_1, x_2, \dots, x_m$ , т.е. в результате помех не происходит появления каких-либо новых сигналов. После передачи сообщения по каналу связи на вход приемника поступают сигналы  $y_1, y_2, \dots, y_n$  смешанные с шумом. Поэтому, при приеме сигнала  $y_j$  нельзя достоверно утверждать какому исходному сигналу  $x_i$ , он соответствует, т.к. случайные помехи могут преобразовать посылаемый сигнал в любой из возможных сигналов  $y_j$ . В результате происходит уменьшение количества информации, поступающей приемнику сообщений, по сравнению количеством информации передаваемой источником в канал связи. Статистика искажений сигналов описывается распределением условных вероятностей  $p(x_i/y_j)$ . При отсутствии помех условная вероятность будет равна безусловной вероятности посылки сигнала  $p(x_i/y_j) = p(x_i)$ .

Количество информации, передаваемое по каналу связи в этом случае можно определить, как уменьшение неопределенности состояния источника существующей до получения сигнала  $y_j$  приемником и после его получения. Неопределенность состояния источника определяется его энтропией  $H(X)$ . Неопределенность источника, после получения приемником сигнала  $y_j$ , есть не что иное, как частная условная энтропия  $H(X/y_j)$ . А среднее количество неопределенности состояния источника

после получения любого из возможных сигналов  $y_j$  будет равно условной энтропии  $H(X/Y)$ . Следовательно, среднее количество информации  $I(X, Y)$  передаваемое от источника сообщений приемнику при посылке одного символа по каналу связи с помехами равно:

$$I(X, Y) = H(X) - H(X/Y). \quad (56)$$

Величина  $H(X/Y)$  характеризует величину потерь информации, приходящуюся на один символ сообщения, обусловленную помехами.

Количество информации обладает следующими свойствами.

1. Симметричность  $I(X, Y) = I(Y, X)$ .
2. Неотрицательность  $I(X, Y) \geq 0$ , причем  $I(X, Y) = 0$ , если помехи полностью забивают полезную информацию, т.е. источник и приемник сообщений независимы друг от друга.
3. Максимальное количество информации которое можно получить от источника сообщений равно его энтропии  $I_{max} = I(X, X) = H(X)$ .

Используя связь между энтропией объединения и условной энтропией  $H(X, Y) = H(Y) + H(X/Y)$ , выражение для количества информации можно представить в следующей симметричной форме:

$$I(X, Y) = H(X) + H(Y) - H(X, Y).$$

В это соотношение подставим вместо энтропий их выражения через ве-

роятности и проведем ряд преобразований:

$$\begin{aligned}
I(X, Y) &= - \sum_{i=1}^m p(x_i) \log p(x_i) - \sum_{j=1}^n p(y_j) \log p(y_j) + \\
&+ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p(x_i, y_j) \log p(x_i, y_j) = \\
&= - \sum_{i=1}^m \underbrace{\sum_{j=1}^n p(y_j/x_i) p(x_i)}_{=1} \log p(x_i) - \sum_{j=1}^n \underbrace{\sum_{i=1}^m p(x_i/y_j) p(y_j)}_{=1} \log p(y_j) + \\
&+ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p(x_i, y_j) \log p(x_i, y_j) = \\
&= - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p(x_i, y_j) \log p(x_i) - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p(x_i, y_j) \log p(y_j) + \\
&+ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p(x_i, y_j) \log p(x_i, y_j).
\end{aligned}$$

Окончательно выражение для оценки среднего количества информации приходящееся на один символ, при передаче сообщений по каналу с помехами, запишется в виде:

$$I(X, Y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p(x_i, y_j) \log \left( \frac{p(x_i, y_j)}{p(x_i)p(y_j)} \right). \quad (57)$$

В случае непрерывных сигналов, передаваемых по каналу связи, количество информации определяется через разности соответствующих относительных энтропий:

$$I(X, Y) = H_\varepsilon(X) - H_\varepsilon(X/Y) = H_\varepsilon(Y) - H_\varepsilon(Y/H) \quad (58)$$

и может быть рассчитано по формуле:

$$I(X, Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x, y) \log \left( \frac{\rho(x, y)}{\rho(x)\rho(y)} \right) dx dy. \quad (59)$$

Рассмотрим пример на нахождение количества информации и оценку величины потерь при передаче сообщения по каналу связи. Пусть на вход

канала связи поступило сообщение в двоичном коде: 1111110000, а на выходе канала связи получено сообщение 1101100010. Определить количество информации переданное в сообщении и величину информационных потерь. Какое максимальное количество информации содержится в передаваемом сообщении?

*Решение.* Сделаем обозначения: сигналы посылаемые источником сообщений  $0 \leftrightarrow x_1, 1 \leftrightarrow x_2$ ; сигналы принимаемые приемником сообщений  $0 \leftrightarrow y_1, 1 \leftrightarrow y_2$ . При отсутствии помех имелось бы полное соответствие посылаемых сигналов принимаемым. В результате помех в канале связи дважды единица была принята как нуль и один раз нуль был воспринят приемником как единица. Статистика посланных и принятых сигналов имеет вид:

$$p(x_1) = 0,6; \quad p(x_2) = 0,4; \quad p(y_1) = 0,5; \quad p(y_2) = 0,5;$$

канальная матрица объединения:

$$P(X, Y) = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 \\ 0,2 & 0,4 \end{pmatrix} \quad (60)$$

Подсчитаем количество информации приходящееся в среднем на один символ сообщения по формуле (57):

$$\begin{aligned} I(X, Y) = & 0,3 \log \frac{0,3}{0,6 \cdot 0,5} + 0,1 \log \frac{0,1}{0,6 \cdot 0,5} + \\ & + 0,2 \log \frac{0,2}{0,4 \cdot 0,5} + 0,4 \log \frac{0,4}{0,4 \cdot 0,5} \approx 0,45 \text{ бит.} \end{aligned}$$

Длина всего сообщения десять символов, поэтому общее количество информации содержащееся в нем равно:

$$10 \cdot I(X, Y) = 4,5 \text{ бит.}$$

При отсутствии помех количество информации, содержащееся во всем сообщении равно:

$$I_{max} = 10 \cdot H(X) = 10(-0,6 \log 0,6 - 0,4 \log 0,4) \approx 10 \cdot 0,97 = 9,7 \text{ бит.}$$

Потери информации при передаче сообщения составили:

$$I = 9,7 - 4,5 = 5,2 \text{ бит.}$$

## Информационные характеристики источника сообщений

Источник является начальным звеном любой системы передачи информации. От его информационных возможностей существенным образом зависят требования, предъявляемые к каналу передачи информации. Например, способен ли канал связи передавать генерируемую источником информацию без задержек, с какой скоростью генерируется информация на выходе из источника и т.п.

Энтропия источника сообщений характеризует количество информации, приходящееся в среднем на один символ передаваемый источником. Она максимальна, если символы вырабатываются (посылаются) источником с равной вероятностью. В случаях, когда либо вероятности посылки символов различны, либо между символами источника сообщений имеются вероятностные связи, энтропия его будет меньше, чем максимально возможная. Поэтому каждый источник сообщений может быть охарактеризован величиной, называемой избыточностью источника сообщений.

**Определение.** *Избыточностью источника сообщений* называется отношение разности максимальной энтропии источника  $H_{max}$  и его энтропии  $H(X)$  к максимальной энтропии источника:

$$R = \frac{H_{max} - H(X)}{H_{max}} = 1 - \frac{H(X)}{H_{max}}. \quad (61)$$

Таким образом, если энтропия это среднее количество информации приходящееся на один символ сообщения, то избыточность – средняя информационная недогрузка символа сообщения.

Среди всех источников сообщений выделяют **оптимальные источники** сообщений – источники с нулевой избыточностью:  $R = 0$ . Для реальных источников сообщений, с ненулевой избыточностью  $R > 0$ , сообщение можно сделать более коротким (сжать) без потерь информации. Действительно, пусть получено одинаковое количество информации  $I_0$  от реального (с энтропией  $H(X)$ ) и оптимального (с энтропией  $H_{max}$ ) источников сообщений, имеющих одинаковый алфавит. Тогда:

$$I_0 = nH(X) = n_1H_{max}, \quad (62)$$

где  $n$  и  $n_1$ , количество символов затраченных на передачу информации реальным и оптимальным источниками сообщений, соответственно. По-



сколькx  $H(X) < H_{max}$ , то  $n > n_1$ . Следовательно, избыточность источника сообщений приводит к тому, что требуется большее количество сигналов для передачи одной и той же информации по каналу связи, по сравнению с оптимальным источником, т.е. увеличивается количество сигналов и время передачи сообщения. Таким образом, выражение для избыточности источника сообщений можно записать в виде:

$$R = 1 - \frac{n_1}{n}. \quad (63)$$

Тем не менее избыточность источника сообщений бывает полезна. В частности, информационная недогрузка символа может быть использована для помехозащищенности передаваемых сообщений.

При работе источника сообщений на его выходе отдельные сигналы появляются последовательно, т.к. каждый сигнал имеет некоторую длительность генерации  $\tau_i$ . Средняя длительность генерации (передачи) сигналов  $\bar{\tau}$  будет равна:

$$\bar{\tau} = \sum_{i=1}^n \tau_i p(x_i), \quad (64)$$

где  $p(x_i)$  – вероятность генерации источником сигнала  $x_i$ .

**Определение.** *Потоком информации источника сообщений называется отношение энтропии источника сообщений к средней длительности передачи сигнала:*

$$\bar{H}(X) = \frac{H(X)}{\bar{\tau}} \text{ бит/сек.} \quad (65)$$

Поток информации определяет скорость выдачи информации, т.е. показывает какое количество информации может генерироваться источником в единицу времени

Рассмотрим пример. Пусть источник информации генерирует три различных сигнала  $x_1, x_2, x_3$  с вероятностями 0,2; 0,5; 0,3. Кодирование сигналов определяется их длительностью 1, 2 и 3 секунды. Чему равна избыточность и максимальный поток информации источника?

*Решение.* Величина энтропии  $H(X)$  источника не зависит от способа представления сигнала, а определяется только вероятностями посылки сигналов:

$$H(X) = -[0,2 \log 0,2 + 0,5 \log 0,5 + 0,3 \log 0,3] \approx 1,47 \text{ бит.},$$

а максимальная энтропия источника с трехсимвольным алфавитом равна  $H_{max} = \log 3 \approx 1,59$ . Согласно формуле (61):

$$R = \frac{1,59 - 1,47}{1,59} = 0,08.$$

Поток информации источника сообщений определяется формулой (65). Максимизировать величину потока информации можно за счет уменьшения средней длительности передачи сигнала  $\bar{\tau}$ :

$$\bar{\tau} = \tau_1 0,2 + \tau_2 0,5 + \tau_3 0,3.$$

Нетрудно увидеть, что при следующем соответствии сигналов и их длительностей  $x_1 \rightarrow 3$  сек.,  $x_2 \rightarrow 1$  сек.,  $x_3 \rightarrow 2$  сек. средняя длительность передачи сигнала будет минимальна:

$$\bar{\tau} = 3 \cdot 0,2 + 1 \cdot 0,5 + 2 \cdot 0,3 = 1,7 \text{ сек.}$$

Максимальный поток информации источника составит

$$\bar{H}(X) = \frac{1,47}{1,7} \approx 0,86 \text{ бит/сек.}$$

## Пропускная способность канала связи с помехами

Для оценки информационных свойств системы передачи информации технические характеристики канала связи имеют первостепенное значение, т.к. с одной стороны, в канале связи на передаваемый сигнал воздействуют помехи, а с другой – любой канал связи накладывает технические ограничения на скорость передачи информации. Одной из важнейших его характеристик является пропускная способность канала связи.

Пусть  $X_T$  – последовательность сигналов генерируемых источником за время  $T$ , а  $Y_T$  – последовательность сигналов принятых приемником за это же время. Количество информации содержащееся в полученном сообщении  $Y_T$  относительно посланного сообщения  $X_T$  обозначим через  $I(Y_T, X_T)$ .

**Определение.** *Скоростью передачи информации по каналу связи называется предел отношения количества переданной информации ко времени передачи информации, когда время передачи информации стремится к бесконечности:*

$$\bar{I}(Y_T, X_T) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{I(Y_T, X_T)}{T} \text{ бит/сек.} \quad (66)$$

Таким образом, скорость передачи информации определяет среднее количество информации получаемое на выходе канала связи в единицу времени.

**Определение.** *Пропускной способностью* канала связи называется максимальное количество информации, которое способен передать канал в единицу времени:

$$C = \max \bar{I}(Y_T, X_T). \quad (67)$$

Пусть в канале связи помехи отсутствуют. Тогда

$$\bar{I}(Y_T, X_T) = \bar{I}(X_T, X_T) = MH(X),$$

где  $M$  – длина сообщения, а  $H(X)$  – энтропия источника сообщений. Известно, что максимальное значение энтропии достигается в том случае, когда все сигналы генерируемые источником сообщений равновероятны, т.е.  $H(X) = \log(m)$ , где  $m$  – разнообразие сигналов источника алфавита. Следовательно, пропускная способность канала связи будет равна:

$$\begin{aligned} C &= \max \bar{I}(Y_T, X_T) = \max \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{I(Y_T, X_T)}{T} = \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{M \cdot H(X)}{M \cdot \tau} = \frac{\log(m)}{\tau}, \end{aligned} \quad (68)$$

где  $\tau$  – средняя длительность передачи сигнала по каналу связи. Если обозначить через  $k = 1/\tau$  – среднее количество сигналов передаваемых по каналу связи в единицу времени, то **пропускную способность канала связи без помех** можно рассчитать по формуле:

$$C = k \log m. \quad (69)$$

Нахождение пропускной способности канала связи с помехами в общем случае достаточно сложная задача. Величина ее будет зависеть от вероятностей искажения символов при передаче сообщения, от вида искажения (взаимозаменяемость символов или возникновение некоторых новых символов) и т.п. Общий вид выражения для расчета пропускной способности канала связи с помехами будет следующий:

$$\begin{aligned} C &= \max \bar{I}(Y_T, X_T) = \max \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{I(Y_T, X_T)}{T} = \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{M \cdot (H(X) - H(X/Y))}{M \cdot \tau} = \max k[H(X) - H(X/Y)]. \end{aligned} \quad (70)$$

Однако для некоторых простейших случаев ее можно определить сравнительно просто. Получим выражение для пропускной способности **двоичного симметричного канала связи**. Такой канал характеризуется тем, что может передавать два различных символа  $x_1$  и  $x_2$  с вероятностями генерации их источником сообщений  $p(x_1) = p$  и  $p(x_2) = 1 - p$ , соответственно. Помехи являются симметричными, т.е. с равной вероятностью  $\mu$  каждый из сигналов может быть искажен и принят приемником, как противоположный сигнал. Наличие помех приводит к тому, что условные вероятности получения сигналов будут иметь вид:

$$p(y_j/x_i) = \begin{cases} \mu, & \text{если } i \neq j; \\ 1 - \mu, & \text{если } i = j. \end{cases} \quad (71)$$

Подставим эти вероятности в выражения для энтропии источника

$$H(X) = -[p \log p + (1 - p) \log(1 - p)], \quad (72)$$

и условной энтропии источника относительно приемника

$$H(X/Y) = -p[(1 - \mu) \log(1 - \mu) + \mu \log \mu] - \\ - (1 - p)[\mu \log \mu + (1 - \mu) \log(1 - \mu)],$$

и используем формулу (70). С учетом, что максимальное значение пропускной способности канала связи будет достигаться тогда, когда вероятности посылки сигналов источником будут одинаковы  $p = 1 - p = 0,5$ , получаем, что **пропускная способность двоичного симметричного канала связи** будет равна:

$$C = k\{1 + [\mu \log \mu + (1 - \mu) \log(1 - \mu)]\}. \quad (73)$$

Видно, что его пропускная способность определяется только вероятностью ошибки  $\mu$ . Величина

$$-[\mu \log \mu + (1 - \mu) \log(1 - \mu)]$$

характеризует средние потери информации приходящиеся на один символ передаваемого сообщения, связанные с наличием помех в канале связи. Аналогично может быть определена и пропускная способность канала связи и для других множеств передаваемых сигналов и уровней помех.

Очевидно, что передача генерируемой источником сообщений информации по каналу связи без задержек возможна не всегда, а при вполне

определенных соотношениях между характеристиками источника сообщений и канала связи. Условия передачи информации по каналу связи без задержек определяются *теоремами Шеннона*. Сформулируем их без доказательства.

1. Если пропускная способность канала связи больше энтропии источника сообщений  $C \geq H(X)$ , то всегда возможно закодировать достаточно длинное сообщение так, чтобы оно передавалось по каналу связи без задержек, если же  $C < H(X)$ , то передача информации по каналу связи без задержек невозможна.
2. Если поток информации источника сообщений больше пропускной способности канала связи  $\bar{H}(X) > C$ , то при любом кодировании сообщений передача информации без задержек и искажений невозможна.

## Контрольные вопросы и задания

1. Для передачи сообщения проведено кодирование буквенных сигналов цифрами:  $A \rightarrow 1, B \rightarrow 2, C \rightarrow 3$ . Источником информации посылается сообщение:  $ABCACCBVBBVCAACVAAACB$ , а приемником принимается:  $12213112223213212132$ . Построить каналные матрицы источника и приемника сообщений, каналную матрицу объединения. Определить количество переданной информации и величину информационных потерь.

2. Определить пропускную способность канала связи, который может пропускать 50 двоичных символов в сек., в случае отсутствия помех. Какова пропускная способность канала, если вероятность искажения символа при передаче 0.05?

3. Источником сообщений генерируются сообщения, вероятности которых равны 0.1, 0.4, 0.3, 0.2. Определить поток информации источника сообщений, если длительность сигнала 0,1 сек.? Какова избыточность источника сообщений?

4. Имеется источник информации обеспечивающий поток информации 100 бит/сек, и два канала связи, каждый из которых может передавать 70 двоичных знаков в секунду. Вероятность ошибки при передаче знака 0.1. Сколько каналов требуется для передачи всего потока информации?

5. Сообщение длиной 100 символов передается источником сообщений, алфавит которого составляет четыре различных символа. Энтропия источника равна 1.5 бита. Определить минимально возможную длину сообщения в том же алфавите, не приводящую к потерям информации.

6. Источником информации используется код, при котором запрещена передача двух одинаковых символов подряд. Алфавит кода состоит из четырех символов. Вероятности передачи всех различных пар символов одинаковы. Длительность  $\tau$  передачи каждого символа одинакова и равна 0.1 сек. Определить поток информации источника сообщений?

# Лекция 5. Теория кодирования

## Основные понятия теории кодирования

В любой задаче, связанной с передачей информации, используется то или иное представление исходного сигнала, генерируемого источником сообщений. Это связано, прежде всего, с возможностями технической реализации канала передачи информации. Во-первых – сигналы генерируемые источником информации и сигналы, которые могут быть переданы по каналу связи могут различаться своей природой. Во-вторых, разнообразие сигналов генерируемых источником сообщений, как правило, может не совпадать с разнообразием сигналов передаваемых по каналу связи и принимаемых приемником.

**Определение.** *Кодированием называется способ отображения информации при ее хранении, передаче и обработке в виде соответствий между элементами сообщений и сигналами, при помощи которых эти элементы можно зафиксировать.*

Таким образом, под кодированием понимается представление  $n$  различных сигналов  $x_i$  вырабатываемых источником, с помощью некоторого нового набора сигналов  $y_j$ , содержащем  $m$  символов. Набор символов, используемых для представления символов исходного алфавита называется **кодовым алфавитом**. Примером кодового алфавита является азбука Морзе. Буквам русского или другого языка сопоставляются последовательности сигналов кодового алфавита: точка, тире, пауза. В вычислительной технике широко используется двоичный код, в котором любая команда или число представляется в виде последовательности нулей и единиц.

Часто разнообразие сигналов генерируемых источником превышает разнообразие сигналов передаваемых по каналу связи  $n > m$ . В этом случае для представления сигнала  $x_i$  может потребоваться несколько сигналов  $y_j$ . Уменьшение количества символов кодового алфавита при-

водит к тому, что техническая реализация системы передачи информации значительно упрощается: требуется распознавать меньшее разнообразие сигналов на выходе канала связи. Например, в случае двоичного алфавита кодирование может заключаться в отсутствии (0) или наличии (1) напряжения в канале связи; в то время как при десятисимвольном кодировании потребовалась бы система, способная различать десять различных значений уровня напряжения, надежное распознавание которых, при наличии помех, гораздо более сложная задача.

**Определение.** *Кодовым словом называется последовательность символов кодового алфавита, поставленная в соответствие сигналу источника.*

Количество символов содержащихся в кодовом слове будем называть *длиной кодового слова* и обозначать  $\mu_i$ . При  $n > m$ , по крайней мере, для некоторых сигналов источника  $\mu_i > 1$ . В тоже время, при уменьшении числа символов кодового алфавита, снижается скорость передачи информации по каналу связи, т.к. для передачи одного кодового слова (исходного сигнала) требуется большее количество символов.

При передаче сообщений возникает проблема разделения кодовых слов. В общем случае это приводит тому, что необходимо вводить дополнительный символ (т.е. увеличивать разнообразие символов кодового алфавита), служащий разделителем между кодовыми словами. В азбуке Морзе таким разделителем служит длина паузы: один такт длительности между символами слова, два такта – между словами, три такта – между предложениями. Если же длина всех кодовых слов будет одинакова, то разделитель между кодовыми словами не требуется. Такие коды называются *комплектными* или равномерными кодами, в отличие от *некомплектных* (неравномерных) кодов, в которых кодовые слова сопоставляемые алфавиту источника имеют различную длину. Очевидно, что от некомплектного кода всегда можно перейти к комплектному, добавляя в конец коротких кодовых слов такое число определенных символов, чтобы длины всех кодовых слов стали одинаковы. Однако, такой способ кодирования является не экономным, т.к. ряд символов не несут информационной нагрузки, а используются только для удобства дешифрации.

Другой способ формирования кодовых слов, не требующий специального разделителя между словами при передаче сообщений, заключается в построении неперекрываемых кодов. Код называется *неперекрыва-*



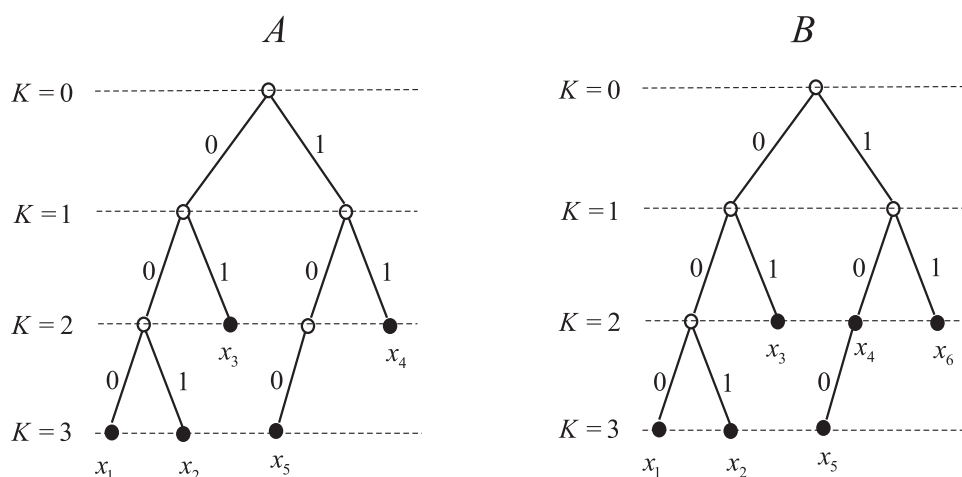


Рис. 7. Кодовое дерево. А – неперекрываемый код, В – перекрываемый код

**емым**, если среди кодовых слов сопоставляемых алфавиту источника нет одинаковых и ни одно более длинное кодовое слово не содержит в начале себя более короткое. Например, азбука Морзе представляет собой перекрываемый код. В ней, в частности, буква А (в русском алфавите) кодируется словом "точка-тире", а буква Б - "точка-тире-тире". Если в длинном сообщении встречается последовательность сигналов "точка-тире-тире", то без специального разделителя нельзя определить какая буква передана.

В случае неперекрываемого кода, по произвольной последовательности кодовых символов взаимно однозначно выделяется соответствующая ей последовательность сообщений источника. Причем, раскодирование можно осуществлять по мере поступления кодовых символов, не дожидаясь поступления всего сообщения. Коды обладающие таким свойством называются **мгновенными кодами**, т.к. не требуется ждать получения символа конца кодового слова и всего сообщения полностью для его расшифровки. Более того, в случае неперекрываемого кода не требуется специальный символ, разделяющий кодовые слова.

Удобно представлять систему кодирования в виде **кодového дерева** – графа (рис. 7), состоящего из узлов и ветвей, соединяющих узлы расположенные на различных "уровнях". Начало графа или корень – узел из которого выходят ветви на нижележащие уровни. Максимальное количество ветвей, выходящих из каждого узла, определяется основанием кодового алфавита  $m$ . На каждом уровне может находиться не более чем  $m^K$  узлов, где  $K$  – номер уровня, считаемый от корня дерева (корень соответствует  $K = 0$ ). Узел из которого не выходят ветви на нижележащие

уровни называется вершиной (или листом) дерева.

Процесс кодирования заключается в том, что каждой ветви, выходящей из узла дерева, сопоставляется определенный символ кодового алфавита. А кодовое слово, сопоставляемое сигналу источника, получается если выписать последовательно все кодовые символы при движении из корня дерева в соответствующий узел. По виду кодового дерева можно определить, является код неперекрываемым или нет: если кодовые слова соответствуют только вершинам кодового дерева, то соответствующий код является неперекрываемым (рис. 7-А), в противном случае код – перекрываемый (рис. 7-В).

На рисунке 7-А, в виде кодового дерева представлена следующая система кодирования пяти различных сигналов источника сообщений в двух символьном алфавите 0, 1:

$$x_1 \rightarrow 000; \quad x_2 \rightarrow 001; \quad x_3 \rightarrow 01; \quad x_4 \rightarrow 11; \quad x_5 \rightarrow 100.$$

Процесс дешифрации сообщений в случае неперекрываемого кода заключается в том, что двигаясь из корня кодового дерева, по мере поступления кодовых символов, приходим в вершину, которая будет определять кодовое слово. После чего возвращаемся в корень и процесс повторяется. Например сообщение 011000000100100111 может быть однозначно декодировано без каких либо разделителей между кодовыми словами:

$$\underbrace{01}_{x_3} \underbrace{100}_{x_5} \underbrace{000}_{x_1} \underbrace{01}_{x_3} \underbrace{001}_{x_2} \underbrace{001}_{x_2} \underbrace{11}_{x_4}.$$

Пусть задан перекрываемый код (рис. 7-В) в двух символьном алфавите 0, 1:

$$x_1 \rightarrow 000; \quad x_2 \rightarrow 001; \quad x_3 \rightarrow 01; \quad x_4 \rightarrow 10; \quad x_5 \rightarrow 100; \quad x_6 \rightarrow 11.$$

Видно, кодовое слово 10, соответствующее сигналу  $x_4$ , не является вершиной дерева, поэтому в сообщении последовательность символов ..100.. может быть интерпретирована, либо как сигнал  $x_4$ , и начало одного из сигналов  $x_1, x_2, x_3$ , либо как сигнал  $x_5$ . В этом случае дополнительно нужен специальный разделитель между кодовыми словами. Пусть получено сообщение 001100110001 закодированное данным кодом. Если попытаться раскодировать его по правилу для неперекрываемых кодов, то первые три символа могут быть однозначно интерпретированы, как  $x_2$ , однако дальше возникает неопределенность, требующая указания конца кодового слова.

В принципе и в случае перекрывающегося кода декодирование посланного сообщения возможно без использования специального разделителя между кодовыми словами, если начинать процесс декодирования с последнего символа. В нашем примере результат декодирования будет следующий:

$$\underbrace{001}_{x_2} \underbrace{10}_{x_4} \underbrace{01}_{x_3} \underbrace{100}_{x_5} \underbrace{01}_{x_3}.$$

Алгоритм заключается в подборе такого количества последних кодовых символов, чтобы при движении из корня дерева они приводили к кодовому слову, однако при этом требуется наложение дополнительных ограничений на построение разрешенных кодовых слов.

Мгновенный код позволяет проводить дешифрацию сообщений не дожидаясь поступления всего сообщения. С этой точки зрения система приема и переработки информации может быть реализована более просто: не требуется устройств по хранению исходного сообщения. С другой стороны, перекрываемый код может быть построен более экономным, требующим меньше времени на передачу информации, по сравнению с непрерывным кодом, однако технически система дешифрации информации будет более сложной, т.к. должна содержать устройство хранения передаваемого сигнала.

## Оптимальное кодирование

Одному и тому же набору  $x_1, x_2, \dots, x_n$  сигналов источника в заданном кодовом алфавите можно сопоставить, в зависимости от алгоритма кодирования, различные наборы кодовых слов. Поэтому возникает вопрос об экономичности кодирования. С помощью какого из кодов одно и то же количество информации будет передано по каналу связи с наименьшими затратами? В качестве критерия оптимальности можно рассматривать длину кодового слова: кодирование более экономично, если длины кодовых слов будут наименьшими.

Пусть кодовый алфавит содержит  $m$  символов. Обозначим через  $\mu_i$  длину кодового слова, соответствующего символу  $x_i$ . Тогда характеристикой экономичности кода будет являться **средняя длина кодовых слов**.

$$L = \sum_{i=1}^n \mu_i p(x_i), \quad (74)$$

где  $p(x_i)$  – вероятность посылки источником сообщений сигнала  $x_i$ .

Чтобы код был оптимальным, он должен удовлетворять следующим условиям.

1. Код будет наиболее экономичным, если каждый кодовый символ будет нести максимальную информационную нагрузку, т.е. каждый символ кодового алфавита в сообщении должен встречаться с равной вероятностью. В этом случае информационная нагрузка каждого символа кодового алфавита будет равна максимальной энтропии  $\log m$ , а количество информации содержащееся в кодовом слове длиной  $\mu_i$  равняется  $\mu_i \log m$ .
2. В результате кодирования не должно происходить потерь информации, т.е. количество информации в кодовом слове не должно быть меньше количества информации содержащегося в исходном сигнале  $x_i$ :

$$-\log p(x_i) \leq \mu_i \log m.$$

Откуда следует, что длина  $i$ -го кодового слова должна удовлетворять неравенству:

$$\mu_i \leq \frac{\log p(x_i)}{\log m}. \quad (75)$$

Умножив обе части на  $p(x_i)$  и просуммировав по  $i$ , получим, что средняя длина кодового слова должна удовлетворять условию:

$$L \geq \frac{H(X)}{\log m}, \quad (76)$$

а минимальная средняя длина кодовых слов будет равна целому числу, содержащемуся в интервале:

$$\frac{H(X)}{\log m} \leq L_{min} \leq \frac{H(X)}{\log m} + 1. \quad (77)$$

Соотношение (76) между оптимальной длиной кодового слова и энтропией источника сообщений представляет собой теорему Шеннона об оптимальном кодировании:

**Теорема Шеннона.** При кодировании сообщений  $x_1, x_2, \dots, x_n$  в алфавите содержащем  $m$  символов, при отсутствии шумов, средняя длина кодового слова не может быть меньше, чем  $H(X)/\log m$ . Причем,

если вероятности сообщений не являются целочисленными отрицательными степенями числа  $m$ , точное достижение указанной границы невозможно, но при кодировании достаточно длинными группами, к этой границе можно приблизиться сколь угодно близко.

Условие существования мгновенных кодов с заданными длинами кодовых слов определяется теоремой Крафта. Она позволяет определить возможность построения неперекрываемого кода для заданных длин кодовых слов, но не дает рецепта его построения.

**Теорема Крафта.** Если  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$  длины кодовых слов, соответствующих сообщениям  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , необходимым и достаточным условием существования неперекрываемых кодов с заданными длинами в кодовом алфавите с основанием  $m$ , является выполнение неравенства

$$\sum_{i=1}^n m^{-\mu_i} \leq 1.$$

Теорема Шеннона позволяет оценить предельно возможную экономичность кодирования. На практике существуют различные способы построения оптимальных кодов. Их алгоритмы строятся с учетом того, чтобы кодовые слова несли максимальную информацию. Код будет наиболее экономичным, если:

- кодовые символы будут равновероятны и независимы;
- символы первичного алфавита, имеющие большую вероятность, будут кодироваться более короткими кодовыми словами.

Рассмотрим *алгоритмы построения оптимального кода* на примере двухсимвольного кодового алфавита  $(0, 1)$ .

#### **Метод Шеннона-Фано.**

1. Все сообщения исходного алфавита располагают в порядке убывания вероятностей.
2. Сообщения, записанные в порядке убывания вероятностей, разбиваются на две приблизительно одинаковые по сумме вероятностей подгруппы. Всем сообщениям, входящим в первую подгруппу приписывают первый кодовый символ 0, а всем сообщениям второй подгруппы второй кодовый символ 1.

3. Каждую подгруппу разбивают на две приблизительно одинаковые по сумме вероятностей подгруппы. Каждой из подгрупп приписывают кодовые символы 0 или 1.
4. Деление производится до тех пор пока каждая из подгрупп не будет содержать только один символ.

Покажем, как производится кодирование методом Шеннона-Фано на следующем примере (символы исходного алфавита уже упорядочены по убыванию вероятностей).

Исходный алфавит	$p(x_i)$	Кодовые слова				$\mu_i$
$x_1$	0,35	0	0			2
$x_2$	0,25	0	1			2
$x_3$	0,12	1	0	0		3
$x_4$	0,10	1	0	1		3
$x_5$	0,08	1	1	0		3
$x_6$	0,06	1	1	1	0	4
$x_7$	0,04	1	1	1	1	4

Средняя длин кодовых слов составит:

$$L = 2(0,35 + 0,25) + 3(0,12 + 0,10 + 0,08) + 4(0,06 + 0,04) = \\ + 4(0,06 + 0,04) = 2,5 \text{ символов.}$$

Алгоритм построения кода Шеннона-Фано в многосимвольном алфавите аналогичен случаю  $m = 2$ : разбиение производится на  $m$  подгрупп, с приблизительно одинаковыми вероятностями  $p = 1/m^k$ , где  $k$  – шаг итерационной процедуры.

### Метод Хафмена.

1. Все символы исходного алфавита располагают в порядке убывания вероятностей.
2. Два символа с наименьшими вероятностями объединяют во вспомогательный символ, вероятность которого определяется как сумма вероятностей исходных символов. Исходным символам сопоставляют кодовые символы 0 и 1.

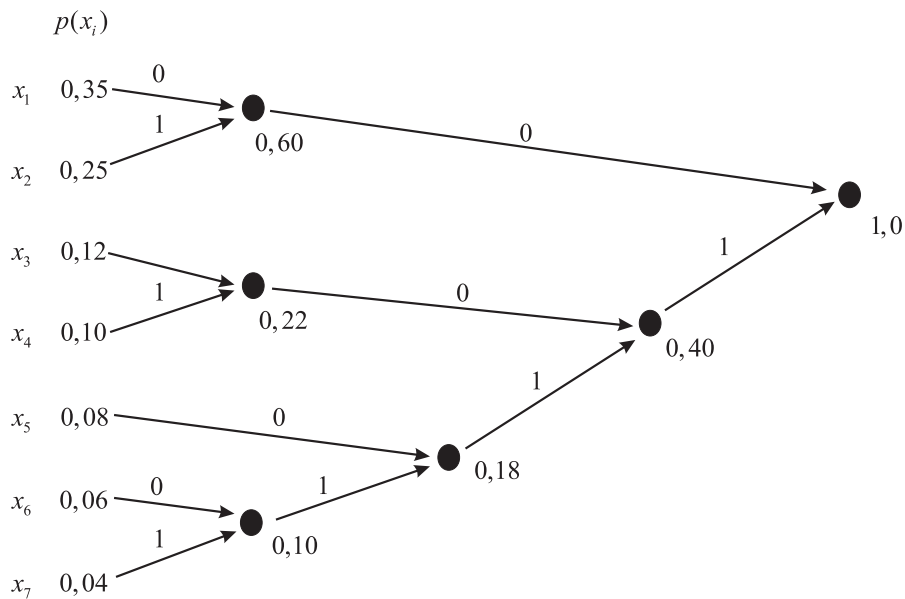


Рис. 8. Оптимальное кодирование методом Хаффмена

3. Процесс объединения символов с наименьшими вероятностями проводят для оставшихся символов, с учетом вспомогательных. Каждый раз сопоставляя объединяемым символам кодовые символы 0 и 1, до тех пор пока сумма вероятностей объединяемых символов не будет равна 1.

Кодирование методом Хаффмена удобно проводить с помощью построения кодового дерева. Проиллюстрируем это на данных предыдущего примера (рис. 8). Сопоставление кодовых слов символам исходного алфавита производится справа налево, т.е. из корня кодового дерева.

Нетрудно увидеть, что в случае двухсимвольного кодового алфавита, методом Хаффмена, мы получили ту же систему кодирования символов исходного алфавита, что и методом Шеннона-Фано. Однако, при кодировании методом Хаффмена в алфавите с  $m > 2$ , средняя длина кодовых слов, по сравнению с методом оптимального кодирования Шеннона-Фано, как правило, меньше.

В алгоритме Хаффмена построения оптимального кода при  $m > 2$  на каждом шаге процедуры происходит объединение во вспомогательный символ  $m$  символов с наименьшими вероятностями, с учетом вспомогательных. Исключение составляет первый шаг, на котором во вспомогательный символ объединяют  $n_0$  символов, число которых определяется

условиями:

$$2 \leq n_0 \leq m, \quad \frac{n - n_0}{m - 1} - \text{целое.}$$

Общий недостаток всех оптимальных кодов заключается в том, что при прочих равных условиях они обладают наименьшей помехозащищенностью.

## Шифрование информации

**Шифрование** или криптографическое закрытие информации представляет собой преобразование сообщений источника, при котором исходное содержание сообщения становится доступным только при использовании специального преобразования полученного сообщения, называемого **ключем**. Любое кодирование информации можно рассматривать как частный случай шифрования, однако при шифровании устанавливается дополнительное требование – алгоритм преобразования должен приводить к скрытию информации от несанкционированного доступа, т.е. по виду поступившего сообщения нельзя определить его содержание.

Для шифрования сообщения необходимо знать алгоритм шифрования (который может быть доступен всем) и индивидуальный ключ (который должен быть скрыт от несанкционированного доступа). Причем алгоритм шифрования остается неизменным для выбранной системы шифрования информации, а ключ может изменяться по мере необходимости. Рассмотрим подходы к шифрованию с использованием некоторых распространенных алгоритмов.

**Прямые подстановки.** Общая идея методов прямой подстановки заключается в замене букв (сигналов) сообщения, буквами того же или другого алфавита. Алгоритмы методов прямой подстановки можно описать, как преобразования числового эквивалента  $P$  букв исходного алфавита сообщений:

$$C = (\alpha P + S) \pmod K, \quad (78)$$

где  $C$  – числовой эквивалент зашифрованной буквы,  $\alpha$  – десятичный коэффициент,  $S$  – коэффициент сдвига,  $K$  – размерность алфавита.

Пусть буквам русского алфавита сопоставлены числовые эквиваленты от 1 до 33, тогда  $K = 33$ . Если требуется использовать в шифре и другие символы, например знаки препинания, пробел, то они также добавляются в исходный алфавит. При  $\alpha = 8$  и  $S = 5$  цифровые эквиваленты букв



кода будут равны:

Буква	А	Б	В	Г	Д	...	М	Н	О	...	Э	Ю	Я
$P$	1	2	3	4	5	...	14	15	16	...	31	32	33
$C$	13	21	29	4	12	...	18	26	1	...	22	30	5
Буква шифра	Л	У	Ы	Г	К	...	Р	Ш	А	...	Ф	Ъ	Д

Зашифрованное слово "ВОДА", запишется, как "ЫАКЛ". Ключом для прочтения данного кода являются числа (8, 5). Метод прямых подстановок достаточно прост, но он не обеспечивает высокой надежности закрытия информации. Это связано с тем, что каждая буква алфавита имеет свою определенную частоту встречаемости. Поэтому имея длинное сообщение и проанализировав статистику встречаемости символов, можно с большой вероятностью восстановить исходное сообщение.

Скрыть эффект постоянства частот встречаемости символов исходного алфавита позволяет использование метода **многоалфавитных подстановок**. В простой многоалфавитной подстановке используется не один кодовый алфавит, а несколько  $B_1, B_2, \dots, B_M$ , последовательно применяемых шифрованию символов исходного сообщения. Таким образом, символ  $x_1$  сообщения заменяется символом из алфавита подстановки  $B_1$ ,  $x_2$  – из  $B_2$ ,  $x_M$  – из  $B_M$ ,  $x_{M+1}$  снова из  $B_1$  и т.д. Степень защиты информации пропорциональна количеству используемых алфавитов подстановки.

Одним из вариантов многоалфавитных подстановок являются **монофонические шифры**, в которых уравнивается частота появления зашифрованных символов, что не позволяет раскрыть шифр с помощью частотного анализа. Чтобы достичь такого эффекта, для часто используемых букв алфавита, используется несколько зашифрованных эквивалентов, а для – редких один-два.

**Шифр Вижинера** является распространенным, достаточно надежным, способом шифрования информации. При его использовании нарушаются статистические закономерности частоты встречаемости символов исходного алфавита. Кодирование сообщения происходит следующим образом. Все буквы исходного алфавита нумеруются. В качестве ключа выбирается какое либо слово, фраза, абзац из книги и т.п. Ключ последовательно подписывается под символами исходного сообщения. Цифровой эквивалент буквы шифрованного сообщения вычисляется как результат сложения по модулю  $K$  цифровых эквивалентов буквы сообщения  $P_c$  и соответствующей ей буквы ключа  $P_k$ . Например, зашифруем слово "ИНФОРМАЦИЯ", используя ключ "ВОДА":

Сообщение	И	Н	Ф	О	Р	М	А	Ц	И	Я
$P_c$	10	15	22	16	18	14	1	24	10	33
Ключ	В	О	Д	А	В	О	Д	А	В	О
$P_k$	3	16	5	1	3	16	5	1	3	16
$(P_c + P_k) \bmod K$	13	31	27	17	21	30	6	25	13	16
Зашифрованное сообщение	Л	Э	Щ	П	У	Ъ	Е	Ч	Л	О

Многоалфавитная подстановка удовлетворяющая условиям:

- число знаков в ключе превышает число знаков исходного сообщения;
- ключ используется только один раз;
- исходный текст неизвестен;

называется **системой Вернама** и теоретически является нераскрываемым шифром. Поэтому, при использовании шифров Вижинера необходимо стремиться к использованию ключей большой длины.

В методах **шифрования гаммированием**, цифровые эквиваленты символов исходного сообщения складываются с псевдослучайной последовательностью чисел, называемых **гаммой** и приводятся по модулю  $K$ . Для построения псевдослучайных последовательностей чисел применяются генераторы псевдослучайных чисел, эффективно реализуемые с использованием компьютерных программных средств. В частности линейный генератор задает последовательность псевдослучайных чисел  $T(i)$  по следующему правилу:

$$T(i + 1) = [A \cdot T(i) + C] \bmod K, \quad (79)$$

где  $A, C$  – некоторые константы,  $T(0)$  - порождающее число, служащие ключем шифра. Такие датчики генерируют последовательность случайных чисел с определенным периодом повторения, зависящим от выбранных значений  $A$  и  $C$ . Процесс расшифровки сообщения заключается в повторной генерации гаммы шифра по известному ключу и наложении полученной последовательности на зашифрованное сообщение. Если период гаммы превышает длительность сообщения, то раскрыть шифр можно только прямым перебором ключей.

## Контрольные вопросы и задания

1. В чем заключаются преимущества и недостатки оптимальных кодов?
2. Построить кодовое дерево для следующих алфавитов:

а) 01, 11, 10,001,000

б) 1,01,000,001,0011,0010

Какой из алфавитов является мгновенным кодом? Раскодировать следующее сообщение: 0111100100100010.

3. Вероятности  $P$  появления букв в русском тексте (при условии, что Е и Ё, Ь и Ъ не различаются) равны:

Символ	$P$	Символ	$P$	Символ	$P$	Символ	$P$
пробел	0,145	Р	0,041	Я	0,019	Х	0,009
О	0,095	В	0,039	Ы	0,016	Ж	0,008
Е,Ё	0,074	Л	0,036	З	0,015	Ю	0,007
А	0,064	К	0,028	Ь,Ъ	0,015	Ш	0,006
И	0,064	М	0,026	Б	0,015	Ц	0,004
Н	0,056	Д	0,026	Г	0,014	Щ	0,003
Т	0,056	П	0,024	Ч	0,013	Э	0,002
С	0,047	У	0,021	Й	0,010	Ф	0,002

Построить оптимальный код методами Шеннона-Фано и Хафмена в случае трехсимвольного алфавита. Построить кодовое дерево. Определить среднюю длину кодового слова.

# Лекция 6. Методы повышения надежности передачи информации

## Обнаружение и исправление ошибок

При передаче информации по каналу связи с помехами неизбежны потери информации. *Помеха* представляет собой стороннее возмущение, действующее в системе и препятствующее правильному приему сигнала. Источники помех может быть различны - это промышленные помехи (работа станков, сварочных аппаратов, городской автотранспорт и т.п.); атмосферные (молния, северное сияние, и т.п.). Если помехи имеют регулярный характер, то их можно устранить с помощью различных фильтров, экранирования, компенсации фонового сдвига сигнала и других способов.

Действие помех в информационном канале связи сводится к тому, что из множества переданных сигналов, некоторая их часть заменяется другими. Причем, помеха может заключаться в том, что один сигнал из кодового алфавита заменится случайным образом на другой из того же кодового алфавита, либо в том что в результате действия помехи появится новый сигнал не содержащийся в кодовом алфавите. В дальнейшем мы будем рассматривать первый случай.

Для защиты полезной информации от воздействия помех требуется, чтобы передаваемое сообщение было избыточным в информационном смысле. Если кодовый алфавит обладает нулевой избыточностью, т.е. каждая кодовая комбинация несет максимальную информацию, то любое искажение символа будет интерпретироваться, как некая новая разрешенная кодовая комбинация и без дополнительных данных будет невозможно распознать, произошла ошибка в процессе передачи информации или же нет. Именно информационная недогрузка символов сообщения может быть использована для помехозащищенности кода (проверки правильности переданной кодовой комбинации) и даже восстано-

ления правильной информации (корректирующие коды).

В целом же возможность обнаружения и исправления ошибок при передаче информации базируется на наложении тех или иных ограничений на множество разрешенных сообщений, т.к. если ограничений нет, то любой получаемый сигнал может рассматриваться как информация. Цель помехозащищенного кодирования состоит в том, чтобы сделать эти ограничения достаточно простыми, позволяющими использовать коды с наименьшей избыточностью. Рассмотрим некоторые идеи лежащие в основе методов построения помехозащищенных кодов на основе двоичного кодового алфавита 0, 1.

**Метод мажоритарного декодирования** (Бодо-Вердана). Общая идея метода заключается в многократном повторении сообщения. Правильный сигнал в определенной позиции кодового слова обнаруживается по накоплению посылок одного вида (0 или 1). Преимущество отдается тому сигналу, посылок которого больше. Пусть по каналу связи передается пятиразрядная кодовая комбинация 10110. Предположим, что при передаче сообщения в каждом разряде кодового слова может происходить не более одной ошибки. Для устранения такой одиночной ошибки, возникающей в результате помех, достаточно передать кодовое слово по каналу связи три раза:

$$\begin{array}{rcccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & \end{array}$$

Видно, что даже если каждая передача кодовой комбинации сопровождалась ошибкой, тем не менее результирующее слово оказалось верное. Преимущества такого способа устранения помех заключаются в простоте реализации. Если ошибки не повторяются в одних и тех же разрядах, то можно исправить количество ошибок равное длине слова. Для устранения  $n$ -кратной ошибки в одном и том же разряде сообщение следует повторить  $(2n + 1)$  раз. В этом методе не происходит обнаружения ошибок: даже если кодовая комбинация передана правильно, все равно требуется еще дважды передать слово по каналу связи для устранения единичной ошибки, что приводит к большой избыточности посылаемого сообщения.

**Обнаружение ошибок.** Простейшим способом обнаружения единичной ошибки в кодовом слове является *проверка на четность*.

Идея ее в том, что в определенную позицию кодового слова добавляется еще один дополнительный символ – **контрольная сумма**, значение которого выбирается из требования, чтобы сумма единиц во всех позициях кодового слова, включая контрольную сумму, была четной. Например:

Кодовое слово	Кодовое слово с контрольной суммой
01001	01001 <b>0</b>
11111	11111 <b>1</b>
10	10 <b>1</b>

Здесь результат проверки на четность в кодовых словах записывается в последнюю позицию слова и выделен жирным шрифтом. Теперь если при передаче сообщения, закодированного с учетом требования четности, происходит единичная ошибка ( $0 \rightarrow 1$  или  $1 \rightarrow 0$ ), то это скажется на количестве единиц в полученном кодовом слове. Такой способ не позволяет обнаруживать двойные ошибки, однако любое нечетное число ошибок обнаружить (но не исправить!) можно.

**Исправление ошибок.** Исправление заключается в том, что нужно указать алгоритм определения позиции ошибки в кодовом слове. Наиболее простой код, позволяющий это делать, называется **прямоугольным кодом**  $m \times n$ . Кодирование информации происходит следующим образом: исходное кодовое слово представляется в виде прямоугольной матрицы состоящей из  $(m - 1)$  строк и  $(n - 1)$  столбца. Затем в конец каждой строки и каждого столбца добавляется символ соответствующий проверке на четность. В результате получается массив символов  $m \times n$  (без заполнения правого нижнего угла данного массива). Записывая последовательность символов построчно, получаем помехозащищенное кодовое слово, позволяющее исправить единичную ошибку, причем неважно, какой символ (информационный или контрольная сумма) может быть искажен при передаче сообщения.

Пусть требуется закодировать прямоугольным кодом следующее сообщение состоящее из двенадцати символов: 010111011010. Представим его в виде матрицы, состоящей из 3-х строк и 4-х столбцов:

$$\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

Добавим в каждую строку и каждый столбец результат проверки на четность:

$$\begin{array}{cccc|c}
 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 \hline
 1 & 1 & 1 & 0 & 
 \end{array}$$

Таким образом помехозащищенное сообщение, позволяющее исправить единичную ошибку будет следующим: 0101011011101000010.

Пусть получено сообщение 0101010011101000010, закодированное прямоугольным кодом  $4 \times 5$ . Требуется обнаружить и исправить ошибку, если она имеется. Представим сообщение в виде матрицы  $4 \times 5$  и проверим правильность контрольных сумм для каждой строки и столбца:

$$\begin{array}{cccc|c}
 0 & 1 & 0 & 1 & 0 + \\
 1 & \mathbf{0} & 0 & 1 & 1 - \\
 0 & 1 & 1 & 0 & 0 + \\
 \hline
 1 & 1 & 1 & 0 & \\
 + & - & + & + & 
 \end{array}$$

Видно, что во второй строке и втором столбце условие четности не выполнено, следовательно символ стоящий на их пересечении был передан с ошибкой. Для исправления сообщения нужно этот символ заменить на противоположный  $0 \rightarrow 1$ .

## Кодовое расстояние

Применение помехозащищенных кодов приводит к избыточности сообщения, что является платой за правильность передаваемой информации. В качестве количественной характеристики избыточности кодирования можно рассматривать отношение общего числа символов содержащихся в кодовом слове к числу информационных символов. Например, в прямоугольном коде  $m \times n$  избыточность составляет

$$\frac{m \times n}{(m - 1) \times (n - 1)}$$

и будет минимальна при  $m = n$ . В целом максимум соотношения информационных и корректирующих символов может рассматриваться как критерий оптимальности помехозащищенного кода.

Возможности помехозащищенного кодирования базируются на том, что не все кодовые комбинации, которые можно получить в заданном

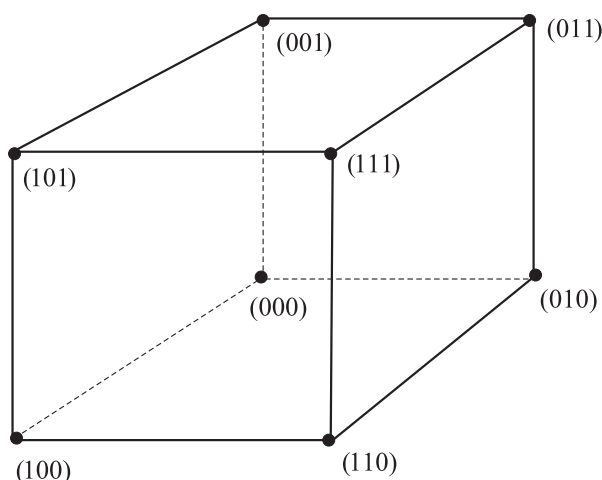


Рис. 9. Кодовое расстояние.

кодовом алфавите, являются разрешенными в данной системе кодирования. Рассмотрим двоичный кодовый алфавит, кодовые слова которого состоят из 3-х символов. Всего возможно построить 8 различных кодовых слов: 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111. Представим их в виде вершин куба с единичной длиной ребра (рис. 9). Будем называть **кодовым расстоянием**  $d$  между кодовыми словами расстояние между вершинами, измеренное вдоль ребер куба. Например,  $d_{(001),(111)} = 2$ .

Если все кодовые комбинации разрешены, то на расстоянии  $d = 1$  от любого кодового слова находятся другие разрешенные кодовые слова. Поэтому действие помехи, заключающееся в изменении какого либо символа на другой, приведет к переходу в вершину куба, так же являющуюся разрешенным кодовым словом.

Пусть расстояние между разрешенными кодовыми комбинациями равно двум. Можно указать два набора кодовых слов удовлетворяющих данному требованию: 1) 000, 010, 011, 110 и 2) 111, 101, 100, 001. При использовании каждого из наборов в качестве разрешенных кодовых комбинаций, появляется возможность обнаружения единичной ошибки, т.к. изменение любого кодового символа в кодовом слове приводит к запрещенной кодовой комбинации.

В случае  $d = 3$  разрешенных наборов будет три: 1) 000, 111; 2) 100, 011; 3) 101, 010. Теперь появляется возможность исправления единичной ошибки: искаженная комбинация заменяется ближайшей к ней разрешенной. При этом нельзя исключать, что может произойти и двойная ошибка, однако вероятность такой ситуации существенно меньше. Причем, двойную ошибку можно обнаружить, но исправить, при использо-



вании данных наборов разрешенных кодовых слов, нельзя.

Кодовое расстояние между кодовыми словами можно вычислить, как число единиц при сложении рассматриваемых кодовых слов по модулю два. Например, найти кодовое расстояние между словами 01101011 и 10100110:

$$\begin{array}{rcccccccc}
 & & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
 \oplus \text{ mod } 2 & & & & & & & & & & \\
 & & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
 \hline
 & & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
 & & & & & & & & & & d = 5
 \end{array}$$

Величина кодового расстояния однозначно связана с числом обнаруживаемых и исправляемых ошибок в кодовом слове:

$$d = r + s + 1, \quad (80)$$

где  $r$  – число обнаруживаемых ошибок,  $s$  – число исправляемых ошибок.

## Идеальный приемник Котельникова

В предыдущих пунктах рассматривались методы помехозащитности передаваемой информации, основанные на свойствах способа построения кода. Однако существуют методы повышения надежности передачи сообщений, основанные на использовании аппаратных средств.

Рассмотрим подход, в котором используется увеличение длительности передачи сигнала. С увеличением длительности сигнала выигрыш в надежности получается за счет учета того, что среднее значение случайной помехи равно 0, а значение полезного сигнала имеет постоянное ненулевое значение. Пусть  $f(t)$  – реальный сигнал, содержащий помехи, полученный приемником. Если известно, что источник может посылать только два возможных вида сигналов:  $U_1(t)$  и  $U_2(t)$ , то можно сравнить полученный сигнал с идеальными сигналами, рассматривая величину:

$$\int_0^T (U_i(t) - f(t))^2 dt,$$

где  $T$  – длительность передачи сигнала.

Пусть источник посылает сигнал  $U_1(t)$ . Тогда при увеличении длительности приема сигнала  $T$  будет усиливаться неравенство

$$\int_0^T (U_1(t) - f(t))^2 dt < \int_0^T (U_2(t) - f(t))^2 dt. \quad (81)$$

При достижении некоторого заданного предела превышения можно с уверенностью распознать посланный сигнал. Такая схема распознавания, основанная на аппаратных средствах и оценке неравенства (81), носит название *идеальный приемник Котельникова*.

## Корректирующий код Хемминга

Коды Хемминга являются наиболее распространенными кодами, имеющими простую и удобную реализацию алгоритма обнаружения и исправления ошибок. Рассмотрим их реализацию на примере обнаружения и исправления единичной ошибки в двоичном кодовом алфавите 0, 1.

Пусть при передаче сообщения, состоящего из  $n_i$  информационных символов может искажаться не более одного символа. Обозначим через  $n_k$  – количество корректирующих символов, необходимых для распознавания и исправления единичной ошибки в передаваемом сообщении. Тогда общее количество символов в помехозащищенном кодовом слове будет равно  $n = n_i + n_k$ . Будем называть *синдромом ошибки* число, указывающее номер позиции ошибки в кодовом слове. При передаче сообщения может быть искажен любой из символов, в том числе и любой из корректирующих, либо не искажен ни один, т.е. передача сообщения прошла без помех. Нулевой синдром ошибки соответствует правильно переданному сообщению. Чтобы можно было различать все возможные ситуации, обусловленные помехами, которые могут приводить к различным синдромам ошибки, необходимо, чтобы разнообразие корректирующих последовательностей (т.е. образованных с помощью  $n_k$  символов) удовлетворяло условию  $2^{n_k} \geq n + 1$ . Откуда получаем соотношение между общим числом символов в сообщении и количеством информационных символов:

$$2^{n_k} \leq \frac{2^n}{n + 1}. \quad (82)$$

Р. Хемминг предложил следующий алгоритм построения помехозащищенного кода:

1. Располагать корректирующие символы в кодовом слове на позициях, определяемых номерами  $2^{i-1}$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots$
2. Каждый корректирующий символ равен результату проверки на четность символов кодового слова, которые содержат 1 в  $i$ -ом разряде двоичного представления номера позиции.

Для нахождения номеров позиций включаемых в  $i$ -ю проверку на четность представим номера позиций в двоичной системе исчисления:

№ (10)	№ (2)
1	1
2	1 0
3	1 1
4	1 0 0
5	1 0 1
6	1 1 0
7	1 1 1
8	1 0 0 0
9	1 0 0 1
10	1 0 1 0
11	1 0 1 1
12	1 1 0 0

Таким образом первую проверку на четность составляют символы стоящие в 1, 3, 5, 7, 9, ... позициях кодового слова; вторую – 2, 3, 6, 7, 10, 11, ...; третью – 4, 5, 6, 7, 12, ... и .т.д

Удобство такого способа построения помехозащищенного кода в том, что если в полученном по каналу связи с помехами сообщении провести проверки на четность для указанных позиций и каждой выполненной проверке на четность сопоставить 0, а каждой не выполненной – 1, а затем записать полученные числа в виде двоичного числа (т.е. первая проверка на четность – младший разряд, вторая проверка – второй справа, последняя проверка – старший разряд числа), то оно будет равно синдрому ошибки, т.е номеру позиции ошибки записанному в двоичной системе исчисления.

Закодируем сообщение 01101 помехозащищенным кодом Хемминга. Данное кодовое слово содержит пять информационных символов  $n_i = 5$ . Используя неравенство (82), получаем, что минимальное число симво-

лов в кодовом слове  $n = 9$ , т.е. потребуется четыре корректирующих символа.

Структура помехозащищенного кодового слова будет следующая:

№ позиции	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Тип символа	к	к	и	к	и	и	и	к	и
Кодовый символ	?	?	0	?	1	1	0	?	1

1-ая проверка на четность:  $? + 0 + 1 + 0 + 1$  будет выполнена, если на первой позиции в качестве корректирующего символа будет стоять 0.

2-ая проверка на четность:  $? + 0 + 1 + 0$  будет выполнена, если на второй позиции в качестве корректирующего символа будет стоять 1.

3-ая проверка на четность:  $? + 1 + 1 + 0$  будет выполнена, если на четвертой позиции в качестве корректирующего символа будет стоять 0.

4-ая проверка на четность:  $? + 1$  будет выполнена, если на восьмой позиции в качестве корректирующего символа будет стоять 1.

Таким образом закодированное сообщение будет иметь вид: 010011011.

Пусть по каналу связи получено сообщение 010001011. Определим есть в нем единичная ошибка или нет. Проведем соответствующие проверки на четность.

1-ая проверка:  $0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 1$  не выполнена, сопоставляем ей 1;

2-ая проверка:  $0 + 1 + 0 + 1 + 0$  выполнена, сопоставляем ей 0;

3-ая проверка:  $0 + 0 + 1 + 0$  не выполнена, сопоставляем ей 1;

4-ая проверка:  $1 + 1$  выполнена, сопоставляем ей 0.

Записываем синдром ошибки 0101 – это двоичное представление числа пять. Следовательно ошибка произошла в пятой позиции кодового слова. Правильное сообщение будет 010011011.

Код Хемминга является равномерно защищенным кодом: после кодирования информационные и корректировочные символы становятся равноправными с точки зрения защищенности от помех.

## Контрольные вопросы и задания

1. Для кодирования товаров используется 13-значный код EAN. Найдите в литературе описание алгоритма проверки контрольной суммы.

2. Получено сообщение 10111010001101, закодированное прямоугольным кодом 3x5. Определить допущена ли единичная ошибка при его передаче и, в случае обнаружения, исправить ее.

3. Определить кодовое расстояние между кодовыми словами 001010101000 и 101100001011. Какое количество ошибок можно обнаружить и исправить при использовании этих кодовых слов для передачи сообщений?

4. Закодировать помехозащищенным кодом Хемминга, позволяющим обнаруживать и исправлять единичную ошибку, следующие сообщения: а) 10110, б) 000000, в) 11111111, г) 101001101001111.

5. Проверить правильность сообщения закодированного с использованием помехозащищенного кода Хемминга и восстановить исходное сообщение: а) 01101010110, б) 0000000, в) 0010011101110, г) 111101001000110.

# Лекция 7. Основы преобразования сигналов

## Классификация сигналов

Сигнал является единственным носителем информации о состоянии изучаемой системы, он воспринимается какими-либо человеческими чувствами или физическими приборами.

**Определение.** *Сигналом  $S(t)$  называется физический процесс, несущий в себе информацию в виде изменений своих характеристик во времени.*

Эти изменения можно определить измеряя значения параметров сигнала, таких как сила тока, напряжение, частота в случае электрического сигнала; громкость, тональность для звукового сигнала и т.п.

По степени полноты априорной информации о сигнале различают детерминированные, случайные и квазидетерминированные сигналы. Сигнал называется **детерминированным**, если он может быть задан аналитически в виде определенной функции времени или другим эквивалентным способом. Примерами детерминированных сигналов могут быть электрические колебания с заданной частотой, амплитудой и фазой или с заданными амплитудными и фазовыми соотношениями их спектральных составляющих; импульс или последовательность импульсов, форма, амплитуда и положение которых на временной оси известны. Другими словами, детерминированный сигнал, это такой сигнал, все характеристики которого можно определить точно для любого момента времени как в прошлом, так и в будущем.

Детерминированные сигналы подразделяют на непрерывные и импульсные. **Непрерывным** является сигнал  $S(t)$  продолжающийся по времени от  $t = -\infty$  до  $t = +\infty$ . На практике под непрерывным сигналом, понимают сигнал продолжающийся достаточно долго, чтобы можно

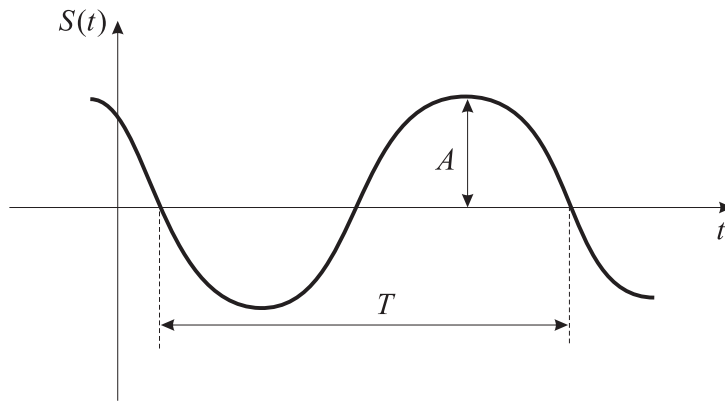


Рис. 10. Периодический сигнал ( $\varphi_0 \neq 0$ ).

было пренебречь эффектами связанными с возникновением и окончанием сигнала. Наиболее важным классом непрерывных сигналов являются **периодические** сигналы, удовлетворяющие при  $t \in [-\infty, +\infty]$  условию:

$$S(t) = S(t + mT), \quad (83)$$

где  $m$  – любое целое число. Минимальное значение  $T$ , через которое сигнал повторяется называется **периодом колебаний**. Примером периодических колебаний (рис. 10) являются гармонические колебания:

$$S(t) = A \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_0\right) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (84)$$

где через  $A$ ,  $\omega_0$ ,  $\varphi_0$ , обозначены, соответственно параметры сигнала – амплитуда, угловая частота и начальная фаза колебания. В системах измерительной техники, регулирования и автоматики важное значение имеют непрерывные **модулированные сигналы** (рис. 11). Они наиболее часто используются для передачи информации и получаются путем изменения амплитуды, частоты или начальной фазы гармонического колебания по некоторому более медленному (по сравнению с  $\omega_0 t$ ) закону. Колебания  $\Omega$ , задающие закон изменения амплитуды, частоты или фазы называют в этом случае управляющими, а исходное высокочастотное гармоническое колебание – несущим.

**Импульсным** называют сигнал, отличный от нуля в течение конечного интервала времени. Импульсные сигналы (рис. 12) могут быть одиночными (непериодическими) или представлять собой теоретически бесконечную последовательность (периодическую или непериодическую) отдельных, разделенных по времени импульсов.

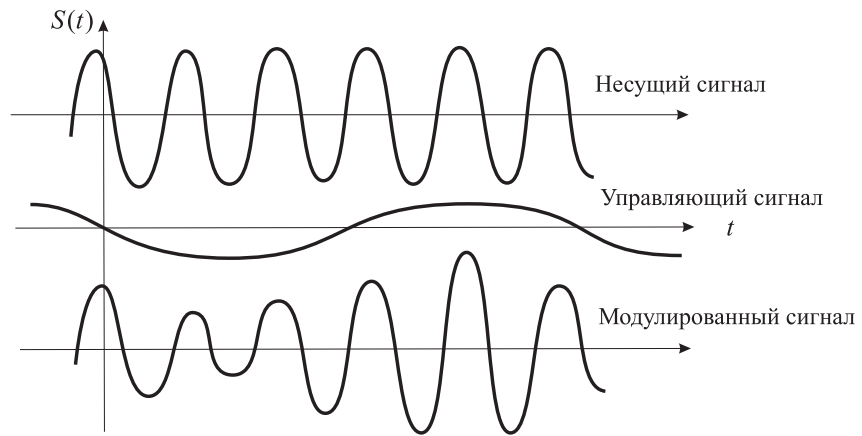


Рис. 11. Амплитудная модуляция сигнала.

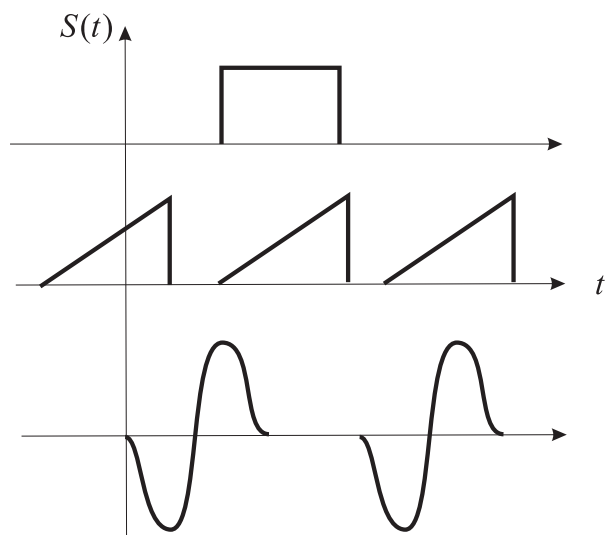


Рис. 12. Примеры импульсных сигналов



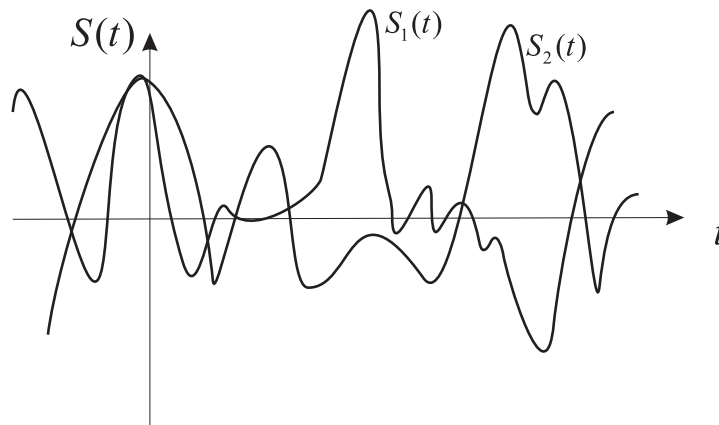


Рис. 13. Реализации случайного сигнала

Сигнал, значения измеряемой характеристики которого в любой момент времени непредсказуемы с требуемой точностью называется **случайным сигналом**. Примерами случайных сигналов могут быть радиоимпульсы, параметры которых зависят от меняющихся условий распространения, сигналы соответствующие человеческой речи, музыке, различные виды электрофизиологических сигналов, различные помехи и т.п. С точки зрения получения новой информации любой сигнал должен рассматриваться, как случайный, так как значения параметров детерминированного сигнала предсказуемы для любого момента времени. В некоторых случаях один и тот же сигнал может рассматриваться, как детерминированный для наблюдателя, знающего закон его изменения, и случайным для другого.

Отдельные сигналы  $S_i(t)$ , получаемые от источника сигналов за определенный фиксированный промежуток времени, называются **реализациями случайного сигнала** (рис. 13). Вид каждой реализации заранее неизвестен и ее нельзя описать аналитическим выражением. Однако, совокупность всех полученных реализаций  $S_i(t)$ , принадлежащих единому источнику, будет обладать определенными статистическими характеристиками, которые содержат всю информацию о свойствах источника сигналов.

Случайные сигналы, реализации которых можно представить функциями заданного вида, но содержащими один или несколько параметров случайных параметров  $\alpha, \beta, \dots$ , не зависящих от времени называются **квазидетерминированными сигналами**. Реализации такого сигнала могут быть записаны в виде  $S_i(t) = S(t, \alpha_i, \beta_i, \dots)$  и полностью определяются значениями случайных параметров  $\alpha_i, \beta_i, \dots$ . Квазидетермини-

рованные сигналы называют также сигналами заданной формы со случайными значениями параметров.

В любой реальной системе наряду с полезными сигналами необходимо учитывать "шумы" или "помехи" – сигналы, мешающие наблюдению полезных сигналов и изменяющие вид исходных сигналов. По характеру действия их можно разделить на *аддитивные и мультипликативные помехи*. При действии аддитивной помехи происходит суммирование полезного сигнала и помехи, а при мультипликативной – результирующий сигнал представляется в виде произведения полезного сигнала и помехи.

В зависимости от задач, которые ставятся при обработке сигнала, сигнал или его параметры могут выступать:

1. как случайное событие, когда требуется оценить сам факт наличия или отсутствия сигнала – в задаче обнаружения сигналов;
2. как случайная величина, когда требуется оценить значение параметра квазидетерминированного сигнала – в задаче оценки параметров сигнала;
3. как случайная функция (случайный процесс), когда требуется оценить реализацию случайного сигнала или случайно изменяющегося параметра сигнала – в задаче фильтрации сигнала.

## Разложение сигнала по системам ортогональных функций

Произвольный сигнал  $S(t)$ , снимаемый с биосистемы, может быть представлен в виде сложной аналитической функции, анализировать которую бывает достаточно трудно. Удобным способом анализа и обработки сигнала в этом случае является его запись в виде комбинации простых составляющих или путем задания известных функций  $\phi_i, i = 0, 1, 2, \dots$  и числовых коэффициентов  $\alpha_i$  так, чтобы сигнал мог быть представлен их линейной комбинацией:

$$S(t) = \alpha_0\phi_0 + \alpha_1\phi_1 + \dots + \alpha_i\phi_i + \dots = \sum_{i=0}^N \alpha_i\phi_i(t). \quad (85)$$

Количество слагаемых  $N$  в сумме может быть и бесконечным. Если функции  $\phi_i$  подобраны достаточно хорошо, то анализ и оценка характеристик сигнала  $S(t)$  существенно упрощается.

Наиболее удобно в качестве набора функций рассматривать системы ортонормированных функций.

**Определение.** *Ортогональной системой функций на отрезке  $(t_1, t_2)$ , называется система действительных функций  $\{\phi_0, \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n, \dots\}$  удовлетворяющих условию:*

$$\int_{t_1}^{t_2} \phi_n(t)\phi_m(t)dt = 0, \quad \text{при } n \neq m. \quad (86)$$

При выполнении дополнительного условия

$$\int_{t_1}^{t_2} \phi_i^2(t)dt = 1, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (87)$$

ортогональная система функций называется **ортонормированной** (ортонормальной).

Если система функций не является ортонормированной, то ее всегда можно нормировать, умножив функции  $\phi_i$  на множители вида

$$\frac{1}{\sqrt{\overline{\phi_i^2(t)}}}, \quad \text{где } \overline{\phi_i^2(t)} = \int_{t_1}^{t_2} \phi_i^2(t)dt. \quad (88)$$

Свойства сигнала  $S(t)$ , разложенного по системе ортонормированных функций  $\{\phi_i\}$  будут полностью определены, если будут известны значения коэффициентов  $\alpha_i$ . Очевидно, что эти коэффициенты нужно выбирать таким образом, что при увеличении числа слагаемых различие  $\Delta$  между сигналом  $S(t)$  и представлением его в виде суммы ряда становилась бесконечно малым:

$$\Delta = \lim_{N \rightarrow \infty} [S(t) - \sum_{i=0}^N \alpha_i \phi_i(t)]^2 \rightarrow 0. \quad (89)$$

Для определения коэффициентов  $\alpha_i$ , обеспечивающих минимум выражения (89), необходимо приравнять частные производные  $\partial \Delta / \partial \alpha_i$  к

нулю и решить полученную систему уравнений относительно  $\alpha_i$ . Использование систем ортогональных функций для представления сигнала  $S(t)$  удобно тем, что значения коэффициентов  $\alpha_i$  находятся достаточно просто. Для этого умножим обе части выражения (85) на  $\phi_n(t)$  и проинтегрируем в пределах  $t_1, t_2$ :

$$\int_{t_1}^{t_2} \phi_n(t) S(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \phi_n(t) \sum_{i=0}^N \alpha_i \phi_i(t) dt. \quad (90)$$

Очевидно, что в правой части все слагаемые вида:  $\int_{t_1}^{t_2} \alpha_n \phi_n(t) \phi_i(t) dt$ , при  $i \neq n$  обращаются в нуль в силу условия ортогональности. Поэтому в правой части останется только одно слагаемое:

$$\int_{t_1}^{t_2} S(t) \phi_n(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \alpha_n \phi_n(t) \phi_n(t) dt. \quad (91)$$

Поскольку данное выражение справедливо для любого  $n$ , то общая формула для вычисления коэффициентов  $\alpha_i$  запишется в виде:

$$\alpha_i = \frac{1}{\int_{t_1}^{t_2} \phi_i^2(t) dt} \int_{t_1}^{t_2} S(t) \phi_i(t) dt \quad (92)$$

или для ортонормированной системы функций:

$$\alpha_i = \int_{t_1}^{t_2} S(t) \phi_i(t) dt. \quad (93)$$

Ряд вида (85), коэффициенты  $\alpha_i$  которого определяются по формулам (92), называется **обобщенным рядом Фурье** по системе функций  $\phi_i(t)$ .

Выбор наиболее рациональной системы ортогональных функций зависит от задач, которые могут сводиться к следующим:

1. Точное разложение сигнала  $S(t)$  на простейшие функции.
2. Аппроксимация сигнала, т.е. сведение к минимуму числа  $N$  членов ряда при заданной величине допустимой погрешности.

Для анализа сложных сигналов, с целью уменьшения числа членов ряда разложения, а в некоторых случаях из соображений простоты технической реализации и обработки, используются *системы специальных функций*, которые являются ортогональными на всей числовой оси или на конечном интервале. Рассмотрим примеры построения таких наборов ортогональных функций.

**Полиномы Лежандра.** Полиномы Лежандра  $P_n(t)$  ортогональны на отрезке  $[-1, 1]$  и могут быть определены из порождающего выражения:

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^{(n)}}{dt^{(n)}} (t^2 - 1)^n \quad (94)$$

или по рекуррентной формуле:

$$nP_n(t) = (2n - 1)P_{n-1}(t) - (n - 1)P_{n-2}(t), \quad P_0(t) = 1, P_1(t) = t. \quad (95)$$

Полиномы первых четырех порядков имеют вид:

$$\begin{aligned} P_0(t) &= 1, & P_1(t) &= t, \\ P_2(t) &= \frac{1}{2}(3t^2 - 1), \\ P_3(t) &= \frac{1}{4}(5t^3 - 3t), \\ P_4(t) &= \frac{1}{8}(35t^4 - 30t^2 + 3). \end{aligned}$$

Несмотря на то, что полиномы Лежандра ортогональны на промежутке  $[-1, 1]$ , их можно использовать для разложения сигналов на любом конечном промежутке времени, т.к. произвольный временной интервал всегда можно преобразовать к интервалу  $[-1, 1]$  путем соответствующего преобразования масштаба по оси времени.

Условия ортогональности для полиномов Лежандра имеют вид:

$$\int_{t_1}^{t_2} P_n(t)P_m(t)dt = \begin{cases} 0, & \text{если } n \neq m, \\ \frac{2}{2n+1}, & \text{если } n = m. \end{cases}$$

Следовательно ортонормированными будут являться функции

$$\phi_n(t) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n(t). \quad (96)$$

**Полиномы Чебышева.** Полиномы Чебышева определяются порождающим уравнением

$$T_n(t) = \frac{(-2)^n n!}{(2n)!} \sqrt{1-t^2} \frac{d^{(n)}}{dt^{(n)}} \left( \sqrt{1-t^2} \right)^{2n-1} \quad (97)$$

или по рекуррентной формуле:

$$T_{n+1}(t) = 2tT_n(t) - T_{n-1}(t), \quad T_0(t) = 1, T_1(t) = t \quad n \geq 1. \quad (98)$$

Нетрудно убедиться, что полиномы первых четырех порядков имеют вид:

$$\begin{aligned} T_0(t) &= 1, & T_1(t) &= t, \\ T_2(t) &= 2t^2 - 1, & T_3(t) &= 4t^3 - 4t, \\ T_4(t) &= 8t^4 - 8t^2 + 1. \end{aligned}$$

Полиномы Чебышева являются ортогональными функциями с весом:  $(1-t^2)^{-1/2}$ , т.е. условию ортогональности удовлетворяют следующие соотношения:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} T_n(t) T_m(t) dt = \begin{cases} 0, & m \neq n; \\ \frac{\pi}{2}, & m = n \neq 0; \\ \pi, & m = n = 0. \end{cases}$$

Таким образом, в качестве системы ортогональных функций на отрезке  $[-1, 1]$ , используется следующий набор функций:

$$\begin{aligned} \phi_0 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt[4]{1-t^2}}, \\ \phi_n(t) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{T_n(t)}{\sqrt[4]{1-t^2}}, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (99)$$

**Полиномы Лагерра.** Полиномы Лагерра определены на интервале  $[0, \infty]$  и могут быть получены из следующего уравнения

$$L_n(t) = (-1)^n e^t \frac{d^{(n)}}{dt^{(n)}} (t^n e^{-t}) \quad (100)$$

или рекуррентной формулы

$$L_{n+1}(t) = (t-2n-1)L_n(t) - n^2 L_{n-1}(t), \quad L_0(t) = 1, L_1(t) = t-1 \quad n \geq 1.. \quad (101)$$

Несколько первых полиномов Лагерра предлагается найти самостоятельно в качестве упражнения.

Полиномы Лагерра ортогональны с весом  $e^{-t}$ :

$$\int_{t_1}^{t_2} e^{-t} L_n(t) L_m(t) dt = \begin{cases} 0, & m \neq n; \\ (n!)^2, & m = n. \end{cases}$$

Поэтому ортонормированная система функций на интервале  $[0, \infty]$  имеет вид:

$$\phi_n(t) = \frac{1}{n!} e^{-t/2} L_n(t), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (102)$$

Функции Лагерра играют особую роль в приложениях, поскольку они могут быть практически реализованы, как импульсные реакции сравнительно простых электронных цепей.

**Функции Уолша.** Функции Уолша представляют собой непрерывные прямоугольные колебания, принимающие только два значения:  $+1$  или  $-1$ . Благодаря простоте их генерирования (они могут быть получены с помощью двоичных логических элементов), преобразования и удобству вычислений на ЭВМ, эти функции широко используются для анализа и обработки сигналов. Сведенные вместе и пронумерованные функции Уолша разных порядков образуют систему функций. Нумерация функций или их упорядочивание может осуществляться различными способами, в зависимости от которых строятся различные системы функций Уолша. На рисунке 14 изображены функции Уолша пронумерованные в соответствии с количеством перемен знака на интервале  $0 < t < 1$ . Удобным способом представления систем этих функций является изображение их в виде квадратных матриц, в которых каждая строка – это функция Уолша, причем для простоты вместо значений элементов  $+1$  или  $-1$ , записывают только их знаки  $+$  или  $-$ . Для функций представленных на рисунке 14 матричная запись имеет вид:

$$W_4 = \begin{pmatrix} + & + & + & + \\ + & + & - & - \\ + & - & - & + \\ + & - & + & - \end{pmatrix}. \quad (103)$$

Матрица  $W$  содержит в любой строке, кроме первой, равное число знаков  $+$  и  $-$ , и является симметричной матрицей. Существуют

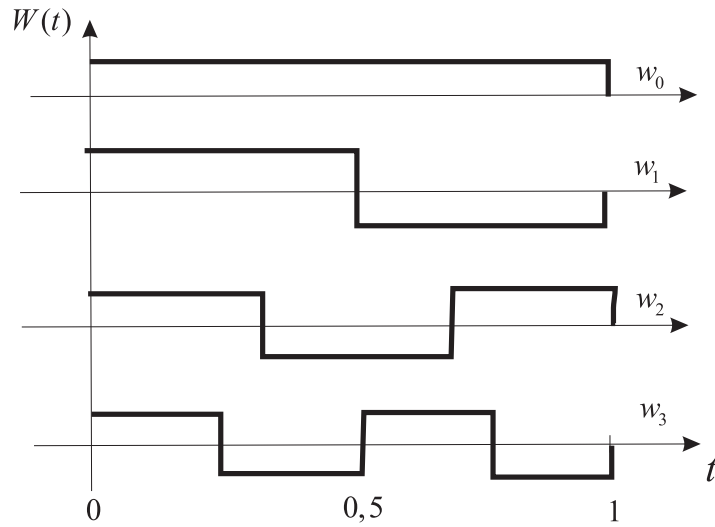


Рис. 14. Функции Уолша

и другие принципы упорядочивания систем функций Уолша. Например, система Уолша-Адамара, в которой элементарная матрица Адамара для одного элемента имеет вид  $H_1 = (+)$ . Для двух и четырех базисных функций матрица Адамара запишется следующим образом:

$$H_2 = \begin{pmatrix} H_1 & H_1 \\ H_1 & -H_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} + & + \\ + & - \end{pmatrix},$$

$$H_4 = \begin{pmatrix} H_2 & H_2 \\ H_2 & -H_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} + & + & + & + \\ + & - & + & - \\ + & + & - & - \\ + & - & - & + \end{pmatrix}.$$

В общем случае:

$$H_N = \begin{pmatrix} H_{N-1} & H_{N-1} \\ H_{N-1} & -H_{N-1} \end{pmatrix}, \quad N = 2^n. \quad (104)$$

Системы упорядочивания базисных функций Уолша и Уолша-Адамара однозначно связаны между собой, каждая из них может быть использована для разложения произвольных сигналов в ряд Уолша-Фурье.

**Тригонометрические функции.** Разложения произвольного сигнала по системам тригонометрических функций (*гармонический анализ сигналов*) широко используются в электротехнике в силу того, что



- гармоническое колебание является единственной функцией времени, сохраняющей свою форму при прохождении колебания через любую линейную цепь: при этом изменяется лишь амплитуда и фаза колебания;
- для анализа электрических цепей можно использовать символический метод;
- генерирование синусоидальных и косинусоидальных колебаний не представляет технических трудностей.

Система тригонометрических функций  $\phi_i$  является ортогональной на отрезке  $[-\frac{T}{2}, +\frac{T}{2}]$ ,

$$\begin{aligned}
 \phi_0 &= \frac{1}{\sqrt{T}} \\
 \phi_1 &= \sqrt{\frac{2}{T}} \sin(\omega_1 t), & \phi_2 &= \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(\omega_1 t), \\
 \phi_3 &= \sqrt{\frac{2}{T}} \sin(2\omega_1 t), & \phi_4 &= \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(2\omega_1 t), \\
 & \dots\dots
 \end{aligned}
 \tag{105}$$

где  $T$  – период периодического сигнала,  $\omega_1 = 2\pi/T$  – основная частота, а кратные ей частоты  $\omega_n = n\omega_1$  – высшие гармоники.

## Контрольные вопросы и задания

1. Почему детерминированные сигналы нельзя использовать для описания помех в системах связи?
2. В чем принципиальное отличие детерминированного сигнала от случайного?
3. В чем принципиальное отличие аддитивных помех от мультипликативных ?
3. Дайте определение ортогональной системы функций.
5. Почему при разложении сигналов используют системы ортогональных функций?
4. Вычислите четыре первых полинома Лагерра.
6. В чем преимущества применения функций Уолша перед другими системами ортогональных функций?

# Лекция 8. Анализ детерминированных сигналов

## Гармонический анализ периодических сигналов. Ряд Фурье

Пусть  $S(t)$  — периодический сигнал произвольной формы с периодом  $T$ . Временной диапазон  $[0, T]$ , соответствующий периоду сигнала, удобно представлять в симметричном виде  $[-T/2, T/2]$ .

**Определение.** *Рядом Фурье называется разложение периодического сигнала  $S(t)$  по системе тригонометрических функций (105):*

$$S(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_1 t) + b_n \sin(n\omega_1 t)], \quad (106)$$

коэффициенты которого вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{2} &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} S(t) dt, \\ a_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} S(t) \cos(n\omega_1 t) dt, \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} S(t) \sin(n\omega_1 t) dt. \end{aligned} \quad (107)$$

Используя свойства тригонометрических функций нетрудно показать, что ряд Фурье можно записать в следующем виде:

$$S(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n), \quad (108)$$

где

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \varphi_n = \operatorname{arctg} \frac{b_n}{a_n}. \quad (109)$$

Формулы (106) и (108) представляют произвольное периодическое колебание  $S(t)$  в виде суммы постоянной составляющей  $a_0/2$  и косинусоидальных и синусоидальных колебаний с амплитудами  $a_n$  и  $b_n$ ; либо только косинусоидальных колебаний с амплитудами  $A_n$  и фазами  $\varphi_n$ . Причем, если сигнал является четной функцией относительно времени, т.е.  $S(-t) = S(t)$ , то в разложении (106) остаются только косинусоидальные члены, если функция сигнала нечетная  $S(-t) = -S(t)$ , то ряд будет состоять только из синусоидальных членов.

На практике используют запись для ряда Фурье в комплексной форме. Удобство такого представления ряда Фурье обусловлено тем, что имеется мощный математический аппарат (операционное исчисление), позволяющий с помощью формализованных методов анализировать и исследовать свойства сигнала.

Для записи тригонометрических функций в комплексном виде воспользуемся формулой Эйлера

$$e^{jx} = \cos(x) + j \sin(x), \quad (110)$$

где  $j = \sqrt{-1}$  – мнимая единица. Тогда

$$\cos(x) = \frac{1}{2}(e^{jx} + e^{-jx}), \quad \sin(x) = \frac{1}{2}(e^{jx} - e^{-jx}). \quad (111)$$

Если в формуле (108) обозначить  $x = n\omega_1 t + \varphi_n$  и  $\dot{A}_n = A_n e^{j\varphi_n}$ , то ряд Фурье запишется в виде:

$$S(t) = \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{\infty} \dot{A}_n e^{jn\omega_1 t}. \quad (112)$$

Величина  $\dot{A}_n$  называется **комплексной амплитудой**  $n$ -ой гармоники и содержит данные об амплитуде и начальной фазе этой гармоники. Она выражается следующим образом через  $S(t)$ :

$$\dot{A}_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} S(t) e^{-jn\omega_1 t} dt, \quad (113)$$

где  $n$  принимает как положительные, так и отрицательные значения. "Отрицательные" частоты имеют формальный характер и обусловлены

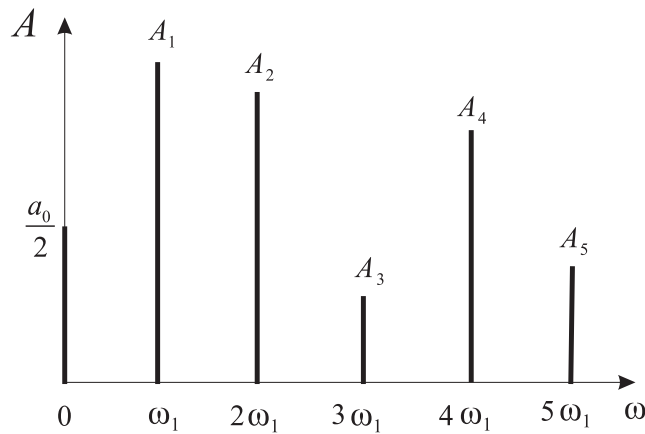


Рис. 15. Амплитудно-частотная характеристика периодического сигнала.

применением комплексной формы записи для представления действительной функции времени. Путем перехода к тригонометрической форме записи всегда можно от них освободиться. Выражения (112) и (113) называются *прямым и обратным преобразованием Фурье*.

Полное представление о структуре спектра периодического сигнала дают его *частотная и фазовая характеристики*. Амплитудно-частотной характеристикой сигнала называется зависимость амплитуды от частоты, а зависимость фазы сигнала от амплитуды называется его фазовой характеристикой. Графически частотная характеристика периодического сигнала+ (рис. 15) представляет собой ряд равноотстоящих линий, находящихся на расстоянии одной гармоники друг от друга. Подобный спектр называется *линейчатым* или дискретным, частоты всех составляющих сигнала изменяются дискретно и пропорциональны основной частоте  $\omega_1$ . Высота линии (значение ординаты) определяется значением амплитуды соответствующей гармоники. Наличие в спектре постоянной составляющей  $a_0/2$  эквивалентно колебанию с нулевой частотой. Построение частотных и фазовых характеристик широко используется для представления и анализа сигналов.

Ниже приведены примеры некоторых наиболее распространенных видов периодических сигналов (рис. 16) и их разложения в ряд Фурье.

**Меандр.** График сигнала изображен на рисунке 16-А, а спектр сигнала имеет следующий вид:

$$S(t) = \frac{4E}{\pi} \left[ \sin(\omega_1 t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega_1 t) + \frac{1}{5} \sin(5\omega_1 t) + \dots \right]. \quad (114)$$

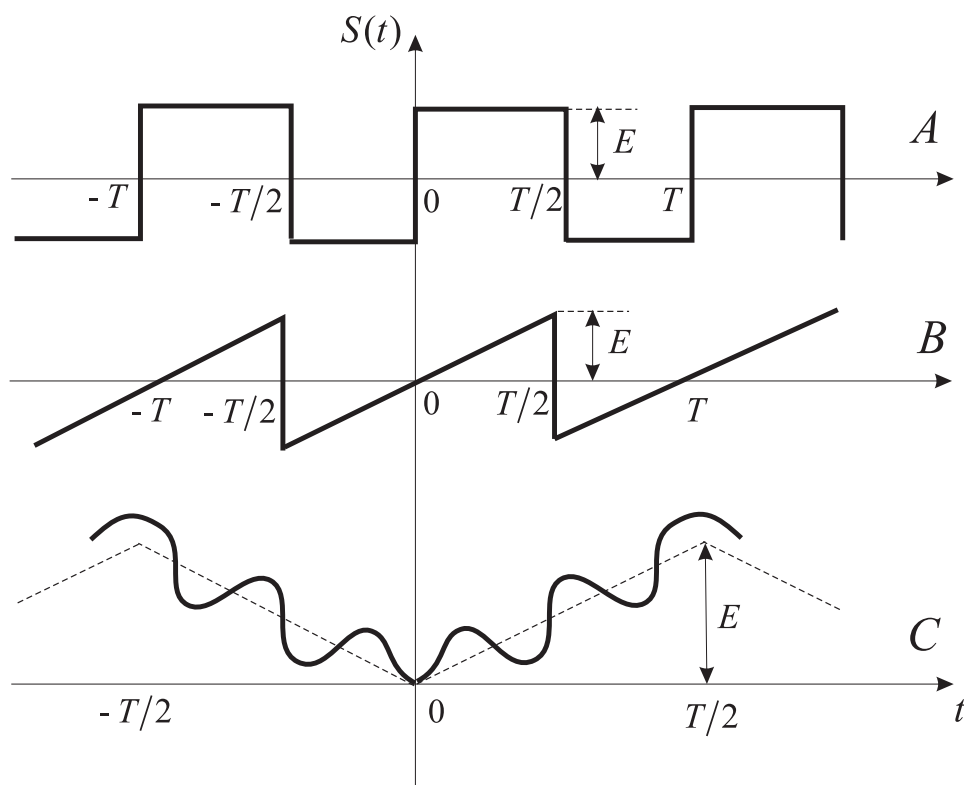


Рис. 16. Периодические сигналы. А – меандр, В – пилообразный, С – униполярный треугольник колебаний

**Пилообразный сигнал.** Рисунок 16-В.

$$S(t) = \frac{2E}{\pi} \left[ \sin(\omega_1 t) - \frac{1}{2} \sin(2\omega_1 t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega_1 t) - \frac{1}{4} \sin(4\omega_1 t) + \dots \right]. \quad (115)$$

**Униполярный треугольник колебаний.** Рисунок 16-С.

$$S(t) = \frac{E}{\pi} \left[ \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \cos(\omega_1 t) + \frac{1}{3^2} \cos(3\omega_1 t) + \frac{1}{5^2} \cos(5\omega_1 t) + \dots \right]. \quad (116)$$

## Гармонический анализ непериодических сигналов

Рассмотренный выше подход к гармоническому анализу периодических сигналов можно использовать и для анализа непериодических сигналов. Пусть задан некоторый непериодический сигнал  $S(t)$  отличный от нуля на промежутке  $(t_1, t_2)$ . Для того, чтобы записать его в виде ряда Фурье, нужно мысленно представить этот сигнал повторяющимся с периодом  $T$  (рис. 17), большим или равным интервалу  $(t_1, t_2)$ . Определенный

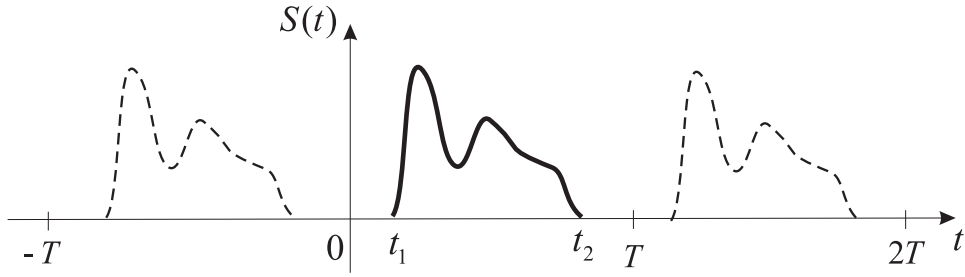


Рис. 17. Представление непериодического сигнала в виде периодического

таким образом сигнал можно рассматривать, как периодический с периодом  $T$  на интервале  $t (-\infty, \infty)$  и к нему применимы преобразования Фурье (112) и (113):

$$S(t) = \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{\infty} \dot{A}_n e^{jn\omega_1 t}, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (117)$$

$$\dot{A}_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_2} S(t) e^{-jn\omega_1 t} dt. \quad (118)$$

Подставим (118) в (117):

$$S(t) = \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{\infty} \int_{t_1}^{t_2} S(t) e^{-jn\omega_1 t} dt e^{jn\omega_1 t} \frac{\omega_1}{\pi}. \quad (119)$$

Здесь учтено, что

$$\frac{2}{T} = \frac{\omega_1}{\pi}.$$

Чтобы перейти к непериодическому сигналу, необходимо  $T$  устремить к бесконечности. При этом в пределе получаем бесконечно малые амплитуды гармоник (118), сумма которых будет представлять исходный непериодический сигнал  $S(t)$  на промежутке  $(t_1, t_2)$ . Число гармоник будет бесконечно большим, так как при  $T \rightarrow \infty$ ,  $\omega_1 \rightarrow 0$ . Таким образом расстояние между отдельными спектральными линиями становится бесконечно малым, а спектр непериодического сигнала – сплошным. Поэтому в (119) можно от суммы перейти к интегралу

$$S(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} \left[ \int_{t_1}^{t_2} S(t) e^{-j\omega t} dt \right] d\omega. \quad (120)$$

Выражение (120) называют **двойным интегралом Фурье**, а внутренний интеграл, являющийся функцией  $\omega$ :

$$S(\omega) = \int_{t_1}^{t_2} S(t)e^{-j\omega t} dt \quad (121)$$

называется **спектральной плотностью** или спектральной характеристикой сигнала  $S(t)$ . В общем случае пределы интегрирования можно распространить до бесконечности, т.к. вне промежутка  $(t_1, t_2)$  сигнал  $S(t)$  равен нулю:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t)e^{-j\omega t} dt \quad (122)$$

$$S(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)e^{j\omega t} d\omega. \quad (123)$$

Полученные выражения называются **прямым** и **обратным преобразованиями Фурье** соответственно.

По известной функции  $S(t)$ , которой описывается сигнал, с помощью прямого преобразования Фурье можно однозначно определить функцию спектральной плотности  $S(\omega)$  и, наоборот, обратное преобразование Фурье позволяет решить задачу восстановления сигнала по его спектральным характеристикам.

## Корреляционная функция

В задачах анализа сигналов бывает важно знать не только его спектральные характеристики, но и иметь представление о скорости изменения сигнала во времени. В качестве характеристики, позволяющей исследовать подобные свойства сигнала широко используется **корреляционная функция** сигнала (или автокорреляционная функция). Она определяется следующим образом

$$R_S(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t)S(t + \tau)dt. \quad (124)$$

Корреляционная функция зависит от параметра  $\tau$ , выражающего относительное смещение колебаний  $S(t)$  и  $S(t + \tau)$  и характеризует степень

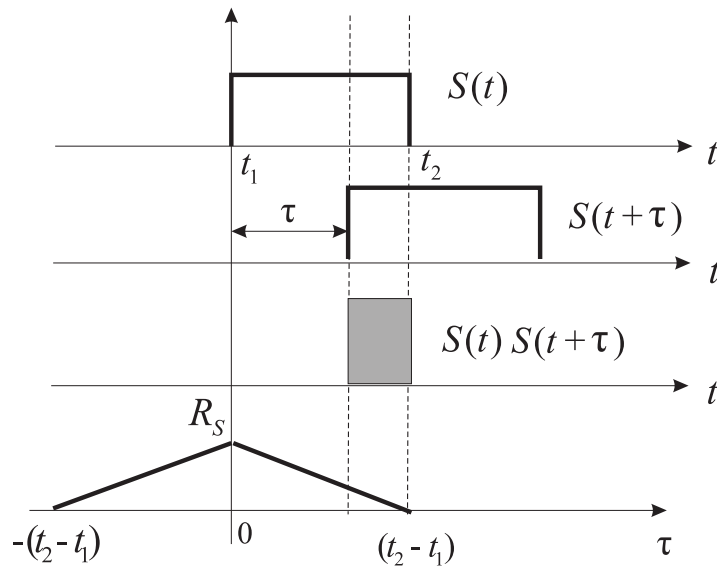


Рис. 18. Вид корреляционной функции для прямоугольного импульса

связи сигнала со своей копией, сдвинутой на величину  $\tau$  по оси времени. Очевидно, что функция  $R_S(\tau)$  достигает максимума при  $\tau = 0$ , т.к. любой сигнал коррелирован с самим собой. На рисунке 18 проиллюстрировано построение корреляционной функции для прямоугольного импульса длительностью  $t_2 - t_1$ .

Корреляционная функция обладает следующими свойствами,

- Функция  $R_S(\tau)$  принимает максимальное значение при  $\tau = 0$ , которое равно энергии сигнала.

$$R_S(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t)^2 dt = E. \quad (125)$$

- Для реальных сигналов ограниченных по энергии и длительности  $R_S(\tau)$  является убывающей, но не обязательно монотонной функцией (например, для периодических сигналов она имеет периодический характер).
- Для сигналов длительности  $\tau_0$  корреляционная функция тождественно равна нулю за пределами отрезка  $\Delta\tau = 2\tau_0$ .
- Корреляционная функция симметрична:  $R_S(-\tau) = R_S(\tau)$ .
- Для непрерывных сигналов, корреляционная функция имеет непрерывную первую производную, которая при  $\tau = 0$  обращается в нуль.



Используя преобразования Фурье можно показать, что

$$R_S(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S^2(\omega) e^{-j\omega\tau} d\omega, \quad (126)$$

$$S^2(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_S(\tau) e^{j\omega\tau} d\tau. \quad (127)$$

Видно, что прямое преобразование Фурье корреляционной функции дает спектральную плотность энергии, а преобразование Фурье спектральной плотности – корреляционную функцию.

Следует отметить, что чем шире спектр сигнала  $S(\omega)$ , тем меньше интервал корреляции  $\tau$ , в пределах которого корреляционная функция отлична от нуля и, наоборот, чем больше интервал корреляции, тем уже спектр сигнала. Функция  $R_S(\tau)$  не зависит также от фазовых соотношений в сигнале и различным по форме сигналам имеющим одинаковый амплитудный спектр, будут соответствовать одинаковые корреляционные функции.

## Разложение сигнала в ряд Котельникова

Использование компьютерной техники для хранения и обработки непрерывных сигналов требует представления их в цифровом виде, т.е. непрерывный сигнал требуется заменить набором отсчетов, взятых через определенные, обычно равные, промежутки времени. Выбор интервалов отсчетов имеет важное значение для сохранения свойств исходного непрерывного сигнала и возможности его восстановления по измеренным значениям.

**Определение.** *Рядом Котельникова называется разложение сигнала  $S(t)$ , заданного на интервале  $(-\infty, \infty)$  в ряд по системе функций вида:*

$$\phi_n(t) = \frac{\sin(nt)}{nt} \quad (128)$$

Такое разложение будет справедливо для сигналов с ограниченным спектром, т.е. сигналов, функция спектральной плотности для которых равна нулю вне некоторого ограниченного диапазона частот  $[-\omega_0, \omega_0]$ .

Пусть имеется сигнал

$$S(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{-j\omega t} d\omega, \quad (129)$$

спектральная плотность которого  $S(\omega) = 0$  при  $\omega \notin [-\omega_0, \omega_0]$ :

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\omega_0}^{\omega_0} S(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (130)$$

Разложим спектральную плотность  $S(\omega)$  в ряд Фурье, причем периодом разлагаемой функции будет величина  $2\omega_0$ :

$$S(\omega) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{A}_n e^{jn\frac{2\pi}{\omega_0}}, \quad (131)$$

где

$$\dot{A}_n = \frac{1}{\omega_0} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} S(\omega) e^{-jn\frac{2\pi}{\omega_0}\omega} d\omega. \quad (132)$$

Сравнивая (130) и (132) можно записать:

$$\dot{A}_n = \frac{2\pi}{\omega_0} \cdot S\left(-n\frac{\pi}{\omega_0}\right) = 2\Delta t S(-n\Delta t), \quad \text{где } \Delta t = \frac{\pi}{\omega_0}. \quad (133)$$

При этом спектральная функция будет иметь вид:

$$S(\omega) = \Delta t \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(-n\Delta t) e^{jn\Delta t\omega}. \quad (134)$$

Подставив (134) в (117) и проведя ряд преобразований, можно получить:

$$S(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(n\Delta t) \frac{\sin(\omega_0(t - n\Delta t))}{\omega_0(t - n\Delta t)}. \quad (135)$$

Полученное разложение представляет собой разложение сигнала  $S(t)$  в ряд по системе функций:

$$\phi_n(t) = \frac{\sin(\omega_0(t - n\Delta t))}{\omega_0(t - n\Delta t)}. \quad (136)$$

Легко проверить ортогональность функций  $\phi_n$ . Действительно, при

$$t = n \frac{2\pi}{\omega_0}$$

функция  $\phi_n = 1$  и равна 0 в моменты, кратные  $2\pi/\omega_0$ . Поэтому при  $t_n = 2\pi/\omega_0$  в ряде разложения остается только один член, который равен мгновенному значению  $S(t)$  в момент времени  $t_n$ .

Поскольку ряд (135) представляет собой разложение сигнала  $S(t)$  справедливое для любого момента времени, то отсюда следует, что колебание не содержащее частот выше  $\omega_0$  полностью определяется своими мгновенными значениями, отсчитанными через интервалы времени  $\Delta t = \pi/\omega_0$ . Данное утверждение носит название **теоремы Котельникова**. Простота определения коэффициентов ряда (они являются просто значениями исходного сигнала, измеренного в определенные моменты времени, кратные  $\Delta t$ ), является большим преимуществом. С помощью ряда Котельникова можно представить импульсный сигнал конечной длительности  $\tau_0$ , ограничивая его спектр некоторой частотой  $\omega_0$ . При этом требуется провести  $k = \tau_0/\Delta t$  отсчетов мгновенных значений сигнала. Такое представление сигнала с ограниченным спектром его мгновенными значениями называется **дискретизацией сигнала**. Она имеет широкое применение при обработке сигналов цифровыми устройствами.

## Контрольные вопросы и задания

1. Какими основными свойствами характеризуются периодические сигналы?
2. Нарисуйте графики четырех первых базисных функций тригонометрического ряда Фурье.
3. Как отличаются значения коэффициентов  $a_n$  и  $b_n$  тригонометрического ряда Фурье для четных и нечетных функций?
4. Через какие интервалы времени нужно измерять значения периодического сигнала, чтобы сохранить его без потерь, если максимальная частота составляет 1000 Гц.

# Лекция 9. Анализ случайных сигналов

## Понятие случайной функции

Случайный сигнал представляет собой некоторый процесс, значения которого невозможно предсказать для любого наперед заданного момента времени. Однако, зарегистрированный в некотором интервале времени сигнал  $S(t)$  будет иметь вполне определенный вид  $S_i(t)$ , который называется *реализацией* случайного сигнала. Очевидно, что различные реализации случайного сигнала будут отличаться друг от друга (рис. 13) и для полной характеристики случайного сигнала необходимо иметь бесконечное множество его реализаций. Для их описания используются статистические методы и методы теории случайных функций (теории стохастических процессов).

**Определение.** *Случайной функцией называется функция, которая в результате измерения может принять тот или иной конкретный вид, неизвестно заранее какой.*

Случайную функцию приближенно описывают как систему случайных величин  $S(t_1), S(t_2), \dots, S(t_m)$ , где  $S(t_i)$  множество значений всевозможных реализаций случайной функции, измеренных в момент времени  $t_i$ . По мере увеличения  $m$  такое описание становится все более и более точным. Таким образом понятие случайной функции можно рассматривать как обобщение понятия системы случайных величин на случай бесконечного множества величин, входящих в систему.

Для случайной функции можно ввести понятие закона распределения случайной функции. Действительно, любое сечение случайной функции  $S(t)$  в момент времени  $t$  можно рассматривать как одномерную случайную величину  $X$ , характеризующуюся одномерным законом распределения  $P(x, t)$ , зависящим от выбранного момента времени  $t$ . Понятно, что

подобное описание не является полным, т.к. не описывает зависимость между сечениями  $S(t)$  при различных  $t$ . Более полным описанием случайной функции будет двумерный закон распределения  $P(x_1, x_2, t_1, t_2)$ , который характеризует распределение и взаимосвязь двух произвольных сечений случайной функции. Для более подробного описания случайной функции требуется привлекать все большее число сечений и рассматривать многомерные функции распределения  $P(x_1, x_2, x_3, \dots, t_1, t_2, t_3, \dots)$ , что делает такой подход громоздким и неудобным.

## Характеристики случайной функции

В практических целях, для исследования случайных функций (сигналов) привлекаются не функции распределения, а **характеристики случайных функций**, аналогичные числовым характеристикам случайных величин. В отличие от числовых характеристик случайных величин, характеристики случайных функций в общем случае являются не числами, а обычными (детерминированными) функциями.

**Определение.** *Математическим ожиданием* случайной функции  $S(t)$  называется неслучайная функция  $m_S(t)$ , которая при каждом значении  $t$  равна математическому ожиданию соответствующего сечения случайной функции:

$$m_S(t) = M[S(t)]. \quad (137)$$

Математическое ожидание случайной функции представляет собой некоторую среднюю функцию около которой различным образом варьируются всевозможные реализации случайной функции.

**Определение.** *Дисперсией* случайной функции  $S(t)$  называется неслучайная функция  $D_S(t)$ , которая при каждом значении  $t$  равна дисперсии соответствующего сечения случайной функции:

$$D_S(t) = D[S(t)]. \quad (138)$$

Дисперсия случайной функции при каждом значении  $t$  характеризует разброс возможных реализаций случайной функции вокруг среднего значения или, другими словами, характеризует "степень случайности" случайной функции.

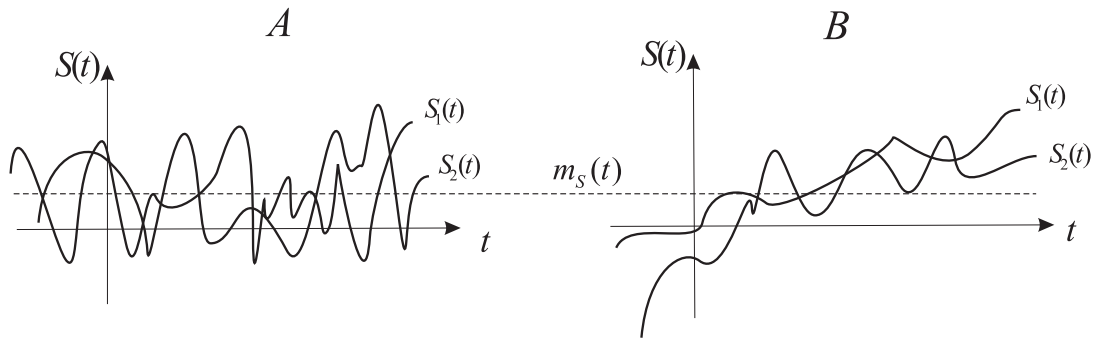


Рис. 19. Реализации случайной функции

**Определение.** *Среднее квадратичное отклонение* случайной функции равно корню квадратному из дисперсии:

$$\sigma_S(t) = \sqrt{D[S(t)]}. \quad (139)$$

Для полного описания случайной функции недостаточно знания только математического ожидания и дисперсии. Действительно, на рисунке 19 изображены реализации случайной функции, математические ожидания и дисперсии которых приблизительно одинаковы. Видно, что внутренняя структура этих случайных функций (процессов), характер их изменения, совершенно различны. Если для случайной функции (А), характерны резкие, неправильные колебания, что приводит к быстрому затуханию зависимости между значениями функции по мере увеличения расстояния между ними, в случае (В) характер изменения случайной функции более предсказуем. Характеристика, которая может учесть такое различие в структуре случайной функции, называется корреляционная (или автокорреляционная) функция.

**Определение.** *Корреляционной функцией* случайной функции  $S(t)$  называется неслучайная функция двух аргументов  $K_S(t_1, t_2)$ , которая при каждой паре значений аргументов  $t_1$  и  $t_2$ , равна корреляционному моменту соответствующих сечений случайной функции:

$$K_S(t_1, t_2) = M[\dot{S}(t_1)\dot{S}(t_2)], \quad (140)$$

где  $\dot{S}(t_i) = S(t_i) - m_S(t_i)$  – центрированное значение случайной функции.

Пусть  $t_1 = t_2 = t$ , тогда  $K_S(t_1, t_2) = M[\dot{S}^2(t)] = D[\dot{S}(t)] = D[S(t)]$ , т.е. корреляционная функция рассчитанная для совпадающих моментов

времени обращается в дисперсию случайной функции. Поэтому в качестве характеристик случайной функции достаточно рассматривать только математическое ожидание и корреляционную функцию.

Наряду с корреляционной функцией часто используется понятие **нормированной корреляционной функции**:

$$R_S(t_1, t_2) = \frac{K_S(t_1, t_2)}{\sigma_S(t_1)\sigma_S(t_2)}, \quad (141)$$

которая представляет собой коэффициент корреляции случайных величин  $S(t_1)$  и  $S(t_2)$ , измеренных в моменты времени  $t_1$  и  $t_2$ .

Рассмотрим, как изменяются характеристики случайных сигналов при некоторых элементарных операциях над сигналами.

1. Добавление к случайному сигналу  $S(t)$  неслучайной составляющей  $f(t)$ . Рассмотрим случайный сигнал  $Y(t) = S(t) + f(t)$  и найдем его математическое ожидание:

$$m_Y(t) = M[S(t) + f(t)] = M[S(t)] + M[f(t)] = m_S(t) + f(t)$$

и корреляционную функцию:

$$\begin{aligned} K_Y(t_1, t_2) &= M[\dot{Y}(t_1)\dot{Y}(t_2)] = M[(Y(t_1) - m_Y(t_1))(Y(t_2) - m_Y(t_2))] = \\ &= M[(S(t_1) + f(t_1) - m_S(t_1) - f(t_1))(S(t_2) \\ &+ f(t_2) - m_S(t_2) - f(t_2))] = M[\dot{S}(t_1)\dot{S}(t_2)] = K_S(t_1, t_2). \end{aligned}$$

Видно, что прибавление к случайному сигналу неслучайной составляющей увеличивает математическое ожидание на величину этой составляющей и не изменяет корреляционную функцию.

2. Умножение случайного сигнала  $S(t)$  на неслучайную составляющую  $f(t)$ . Используя свойства математического ожидания и дисперсии нетрудно убедиться, что математическое ожидание и корреляционная функция случайного сигнала  $Y(t) = S(t)f(t)$  имеют вид:

$$m_Y(t) = f(t)m_S(t), \quad K_Y(t_1, t_2) = f(t_1)f(t_2)K_S(t_1, t_2).$$

3. Математическое ожидание центрированной случайной величины  $\dot{S}(t) = S(t) - m_S(t)$  равно нулю, а корреляционная функция равна корреляционной функции исходной случайной величины:

$$m_{\dot{S}}(t) = 0, \quad K_{\dot{S}}(t_1, t_2) = K_S(t_1, t_2).$$

Поскольку переход к центрированной случайной величине определяется только выбором системы отсчета, а сама корреляционная функция при этом не изменяется, то это ее свойство широко применяется для анализа случайных сигналов.

## Стационарные случайные сигналы

Рассмотрим случайные процессы, которые протекают во времени достаточно однородно и имеют вид непрерывных случайных колебаний вокруг некоторого среднего значения, причем ни амплитуда, ни характер этих колебаний не изменяются с течением времени. Подобным образом ведут себя, например, колебания напряжения в электросети, случайные помехи в радиоприемнике и т.п. Такие случайные процессы (и функции, которые их описывают) называются стационарными.

**Определение.** *Стационарной случайной функцией* называется случайная функция  $S(t)$ , если ее математическое ожидание и квадратичное отклонение не зависят от времени, а корреляционная функция зависит только от разности времен:

$$\begin{aligned} m_S(t) &= \text{const}, & \sigma_S(t) &= \text{const}, \\ K_S(t_1, t_2) &= K_S(t_2 - t_1) = K_S(\tau). \end{aligned} \tag{142}$$

Если характеристики случайного процесса не удовлетворяют условиям (142), то процесс является нестационарным. Примерами нестационарных процессов могут являться затухающие колебания в электрической цепи, процесс сгорания и т.п. Некоторые, нестационарные в целом, процессы можно в определенные интервалы времени рассматривать, как приблизительно стационарные.

Любой стационарный процесс можно рассматривать, как продолжающийся во времени неопределенно долго и в качестве начала отсчета выбирать произвольный момент времени, поскольку исследуя стационарный процесс на любом промежутке времени мы должны получить одни и те же характеристики. Требование постоянства во времени математического ожидания для стационарного процесса не является существенным, т.к. всегда можно перейти к центрированной случайной функции, для которой математическое ожидание тождественно равно нулю. Поэтому, если нестационарность процесса определяется только изменением во времени



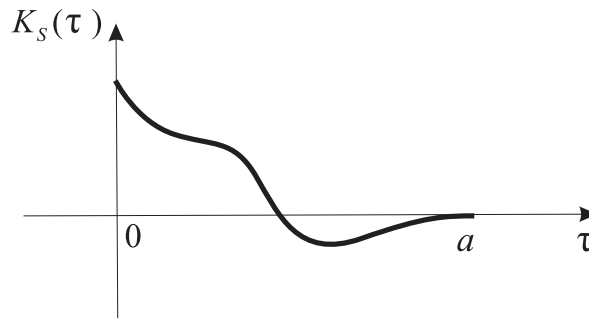


Рис. 20. Пример корреляционной функции

математического ожидания, то его можно изучать, как стационарный процесс.

Корреляционная функция стационарного случайного процесса является функцией не двух, а только одного аргумента, что существенно упрощает математические операции со стационарными функциями. Из того, что любая корреляционная функция удовлетворяет условию симметрии, следует четность корреляционной функции стационарного процесса. Действительно:

$$\begin{aligned} K_S(t_1, t_2) = K_S(t_2, t_1) &\Rightarrow K_S(t_2 - t_1) = K_S(t_1 - t_2) = \\ &= K_S(-(t_2 - t_1)) \Rightarrow K_S(\tau) = K_S(-\tau), \end{aligned}$$

поэтому корреляционную функцию достаточно определить и исследовать лишь для положительных значений аргумента.

Величина  $K_S(\tau)$  характеризует связь между значениями сигнала разделенными промежутком времени  $\tau$ . Вид функции корреляции (рис. 20) дает представление о скорости изменения случайного сигнала: чем медленнее изменяется сигнал, тем длительнее интервал времени, на котором наблюдается статистическая связь между его мгновенными значениями. По мере увеличения промежутка времени между рассматриваемыми значениями стационарной функции величина корреляционной функции уменьшается. Видно, что корреляционная функция для некоторых  $\tau$  может принимать отрицательные значения, что указывает на некоторую периодичность в структуре стационарного случайного процесса, поскольку на расстоянии примерно равном по времени половине периода основных колебаний, наблюдается отрицательная корреляция между значениями случайной функции: положительным отклонениям от среднего в одном сечении соответствуют отрицательные отклонения от среднего через определенный промежуток времени и наоборот.

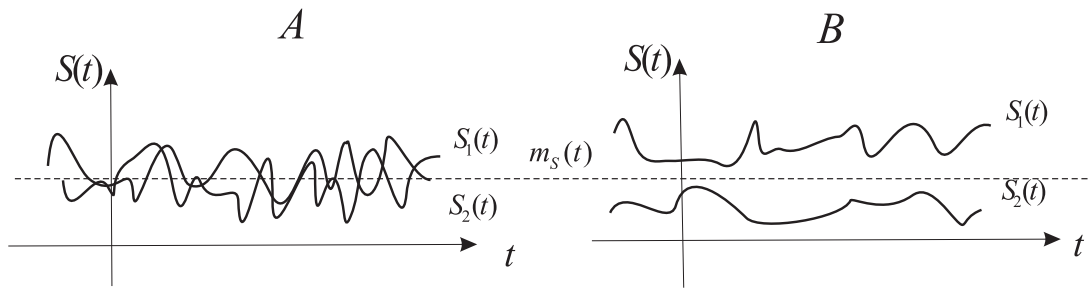


Рис. 21. Реализации  $A$  – эргодической и  $B$  – неэргодической стационарных случайных функций

С помощью функции корреляции можно определить интервал корреляции  $\tau_0 = a$ , т.е. такой промежуток времени, на котором еще существует взаимозависимость между значениями случайной функции. Поскольку математическое ожидание стационарной случайной функции не зависит от времени, а корреляционная функция от начала отсчета, то можно предположить, что любая реализация стационарной случайной функции должна нести в себе всю информацию о ее свойствах. Оказывается, что это предположение выполняется не для любых стационарных случайных функций. На рисунке 21 приведены реализации двух стационарных функций, имеющих одинаковые математические ожидания. Если мы будем рассматривать в течение достаточно долгого промежутка времени по отдельности каждую реализацию в случае  $B$ , то мы получим различные средние значения, в отличие от случая  $A$ , когда средние значения для каждой реализации приблизительно одинаковы. Другими словами, случаю  $B$  присуща внутренняя неоднородность процесса, т.е. внутри него можно выделить более элементарные составляющие со своими индивидуальными характеристиками. Для процесса  $A$  подобная неоднородность отсутствует. Это свойство "внутренней неразложимости" называется эргодичностью стационарного случайного процесса.

**Определение.** Эргодической случайной функцией называется стационарная случайная функция, для которой усреднение любой вероятностной характеристики по множеству реализаций эквивалентно усреднению по времени одной реализации бесконечной длительности.

Математическое ожидание эргодической случайной функции  $S(t)$  мо-

жет быть определено следующим образом:

$$m_S(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t)P(S)dS = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} S(t)dt, \quad (143)$$

где  $P(S)$  – одномерная функция плотности вероятности. На практике оценка математического ожидания сводится к замене интеграла (143) интегральной суммой по достаточно длинному, но конечному промежутку времени  $T$ :

$$m_S(t) \approx \frac{1}{T} \sum_{i=1}^n S(t_i)\Delta t. \quad (144)$$

Таким образом, для оценки  $m_S(t)$  достаточно проводить измерения значений только одной реализации через промежутки времени  $\Delta t$ . Чтобы получить хорошую оценку математического ожидания нужно, чтобы количество точек измерения было достаточно большое. Чем более высокочастотные составляющие присутствуют в случайном сигнале, тем более часто нужно проводить измерения. Рекомендуется выбирать  $\Delta t$  таким образом, чтобы на полный период самой высокочастотной гармоники в составе случайной функции приходилось порядка 5 – 10 точек.

Аналогично определяются дисперсия и корреляционная функция эргодической случайной функции:

$$D_S(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S^2(t)P(S)dS = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} S^2(t)dt, \quad (145)$$

$$K_S(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t)S(t + \tau)P(S)dS = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} S(t)S(t + \tau)d\tau. \quad (146)$$

Вид корреляционной функции позволяет нам судить об эргодичности или неэргодичности случайного процесса. Если корреляционная функция  $K_S(t)$  при увеличении  $\tau$  стремится к нулю, то это говорит в пользу эргодичности изучаемого случайного процесса. Если же корреляционная функция начиная с некоторого момента  $\tau$  не убывает, а остается приблизительно постоянной, то это признак неэргодического случайного процесса.

## Контрольные вопросы и задания

1. В чем различие между эргодическим и неэргодическим случайным сигналом? Приведите примеры эргодического и неэргодического случайного сигнала.
2. Как изменяются характеристики стационарного случайного сигнала при добавлении к нему неслучайного сигнала?
3. Как изменяются характеристики стационарного случайного сигнала при умножении его на неслучайный сигнал?

# Лекция 10. Основные понятия теории распознавания образов

## Постановка задачи распознавания

Способность к классификации, распознаванию представляет собой одно из важнейших свойств человека. Причем человек умеет распознавать как конкретные, так и абстрактные образы объектов окружающего мира. Например, узнать знакомого можно по фотографии, по словесному описанию, по походке, голосу, вне зависимости от условий освещения, ракурса и т.п. Все это говорит в пользу того, что процесс распознавания базируется на достаточно общих принципах, позволяющих проанализировать объект и выделить некоторые специфические его особенности, важные именно с точки зрения распознавания. Устойчивый образ, позволяющий успешно решать задачи распознавания, создается на основе анализа ограниченной совокупности конкретных объектов. Причем, если нам встречается объект, никогда ранее не встречавшийся, то тем не менее, мы без труда сопоставляем его с определенной группой.

Практически вся работа врача-исследователя, а тем более лечащего врача, связана с распознаванием образов: на основе имеющейся информации о пациенте (результаты анализов, жалобы, осмотр) требуется поставить диагноз, т.е. распознать болезнь. Другие направления биомедицинского приложения теории распознавания образов включают широкий спектр задач по разработке алгоритмов распознавания и анализа зрительных изображений: кардиограмм, рентгенограмм, автоматизации цитогенетического анализа хромосом, автоматизированного анализа и интерпретации различного рода анкет и т.п.

Теория распознавания образов является методологической основой решения задач классификации и принятия решений. **Распознавание образов** - это обработка и сравнение (распознавание) информации, а задача распознавания в целом заключается в установлении различий

между исходными объектами с помощью выделения их существенных свойств.

Основным понятием в теории распознавания образов является понятие образа (класса) объектов.

**Определение.** *Образом (классом) называется множество объектов, объединенных некоторыми общими свойствами.*

**Определение.** *Признаками класса называется совокупность свойств, характеризующих класс.*

Видно, что понятия класса объектов и признаков класса взаимосвязаны. Пока не указаны общие свойства (признаки), невозможно определить класс объектов и, наоборот, пока не задан класс объектов нельзя определить характеризующие его признаки. Более того, в зависимости от выбора признаков, один и тот же объект может быть отнесен к различным классам. Например, одну и ту же группу людей разделить на классы "здоровый" — "больной"; "женщина" — "мужчина" и т.п. Видно, перенесение акцента с одних признаков на другие может изменить всю классификацию.

Множество различных классов будем обозначать большими буквами  $A_1, A_2, \dots, A_M$  и называть **алфавитом классов**. Задача распознавания возникает только в том случае, если  $M > 1$ . Отдельные объекты (реализации) будем рассматривать как векторы  $\vec{x}_i$  и описывать совокупностью признаков  $(x_{i,1}, x_{i,2}, \dots, x_{i,n})$ . Предполагается, что все классы алфавита описываются одним и тем же набором признаков.

Использование набора числовых признаков позволяет провести удобную геометрическую интерпретацию класса как множества точек в пространстве признаков (рис. 22), занимающих некоторую область. Возможны две ситуации. Области, занимаемые различными классами, не перекрываются между собой ( $A_1$  и  $A_2$ ). Такое расположение областей говорит о том, задача распознавания в заданном пространстве признаков может быть успешно решена и можно определить границу  $d_1$  успешно разделяющую данные классы объектов. Если же области перекрываются ( $A_1$  и  $A_3$ ), то либо классы объектов в принципе неразделимы, либо пространство признаков выбрано неудачно. Хотя и в этом случае можно определить границу между классами  $d_2$  таким образом, чтобы минимизировать количество ошибок распознавания.

Существуют различные **способы задания класса** объектов:

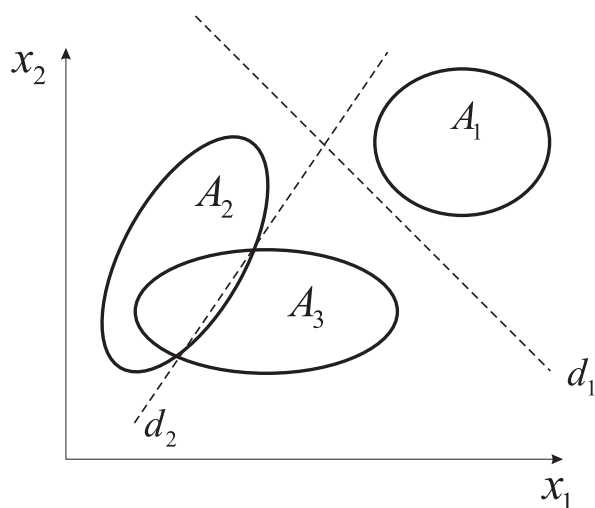


Рис. 22. Геометрическое представление классов в двумерном пространстве признаков

- Перечисление всех объектов представляющих класс. Удобно, когда количество объектов ограничено, например буквы, цифры в задаче распознавания текстов.
- Выделение общих свойств, характеризующих класс, т.е. задаются признаки и диапазоны их изменения для каждого класса объектов.
- Кластеризация, т.е. указание областей, занимаемых классом в пространстве признаков.

**Определение.** *Задачей распознавания образов называется задача выделения из множества исходных данных, признаков, характерных для заданной классификации объектов, а также нахождение процедур или правил, необходимых для классификации вновь предъявляемых объектов.*

В решении задачи распознавания можно выделить два этапа.

**Обучение распознаванию** – по заданной эталонной выборке, содержащей объекты всех классов  $A_i$ , требуется выбрать решающие правила (критерии, признаки) по которым можно проводить классификацию. Различают два способа обучения: **обучение с "учителем"**, когда известно к каким классам принадлежат объекты эталонной выборки и **обучение без "учителя"**, когда принадлежность объектов к классам неизвестна. Очевидно, что во втором случае требуется предварительное разбиение эталонной выборки на классы, что само по себе представляет сложную неформальную задачу.

**Распознавание** – предъявляется объект, не содержащийся в эталонной выборке (т.е. с неизвестной классификацией), требуется отнести его к определенному классу на основе построенного решающего правила. Качество распознавания будет определяться не только построенным правилом распознавания, но, и во многом тем, насколько хорошо эталонная выборка отображает разнообразие объектов представляющих классы.

В настоящее время разработано огромное количество различных методов решения задач распознавания образов. Все они могут быть сгруппированы, в зависимости от применяемых способов и приемов построения решающих правил.

**Эвристические методы.** В их основе лежит интуиция и опыт специалиста в предметной области. В результате изучения проблемы разрабатывается набор специфичных, именно для данной задачи, процедур по принятию решения.

**Синтаксические (структурные) методы.** Классификация объектов производится на основе построения формального языка, структура которого отображает структуру рассматриваемого класса объектов.

**Математические методы.** Принятие решения основано на использовании некоторого математического формализма. Все методы математического распознавания образов можно условно разделить на следующие группы:

- геометрические;
- статистические;
- методы потенциальных функций;
- коллективов решающих правил (методы голосования).

Такое количество методов говорит о том, что задача распознавания образов может быть решена с использованием различных формальных методов. Единственным критерием выбора метода решения является качество распознавания объектов, например, минимум ошибок распознавания для объектов, не включенных в обучающую выборку.



## Виды признаков

Выбор признаков является одной из основных проблем в задаче распознавания образов. Хотя каждый признак отражает объективные характеристики объекта, однако не каждый признак будет способствовать его успешному распознаванию. Например, признак "рост" в классификации "больной - здоровый" вряд ли будет способствовать улучшению постановки диагноза. Признаки могут быть различного вида, определяемого целями и задачами конкретного исследования. В теории распознавания образов выделяют следующие **виды признаков**, характеризующие классы объектов:

**Детерминированные** – признаки, принимающие определенные числовые значения для объектов данного класса. Измерение значения признака у объекта позволяет отнести его к заданному классу. Например, при классификации людей по росту: "низкий рост - средний рост - высокий рост" – измеренное значение роста 195 см у человека позволяет отнести его к классу "высокий рост".

**Вероятностные** – признаки, случайные значения которых распределены по всем классам изучаемых объектов. Решение о принадлежности объекта к тому или иному классу принимается на основе оценки вероятности появления данного значения признака у объектов класса. Например, при классификации людей по полу, признак "рост" будет являться вероятностным. Измеренное значение роста 195 см у конкретного человека позволяет с большей вероятностью отнести его к мужскому полу, чем женскому.

**Логические** – признаки, представляющие собой высказывания, которые могут принимать только два значения "истина - ложь", (да - нет, 0 - 1 и т.п.). Как правило, это признаки, не имеющие количественного выражения. Например, "кашель", "боль в горле" и т.п. Иногда к логическим относят такие признаки, у которых нас не интересуют количественные значения, а важен лишь сам факт его наличия ("есть температура - нет температуры").

**Структурные** – признаки, представляющие собой структуры объекта. Например - "цвет глаз". В задачах распознавания текстов это могут быть элементы букв алфавита – "вертикальная черта", "наклонная черта", "овал" и т.п. Удобно, чтобы признаки класса задавались

числовыми значениями. Если признак качественный, то формально различным его градациям также можно сопоставить некоторые порядковые числовые значения, хотя сравнивать его значения по величине будет некорректно.

## Расстояние и мера сходства

Все геометрические методы классификации основаны на использовании некоторой функции подобия (принадлежности) объекта данному классу. За меру близости между объектом  $\vec{x}$  и классом  $A_i$  можно выбрать расстояние от объекта до класса.

**Определение.** *Расстоянием* называется однозначная неотрицательная функция двух аргументов  $d(x, y)$ , если для любых двух точек  $x$  и  $y$  выполняются условия:

1.  $d(x, y) = d(y, x)$  – свойство симметричности;
2.  $d(x, y) = 0$  тогда и только тогда, когда  $x \equiv y$ ;
3.  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$  для любых  $z$  (неравенство треугольника).

Существует большое количество функций, удовлетворяющих данному определению, каждую из которых можно рассматривать как характеристику близости между объектами. Причем, от способа определения расстояния будет существенно зависеть успешное решение конкретной задачи распознавания.

Приведем некоторые примеры расстояний. Пусть заданы два объекта в  $n$ -мерном пространстве признаков:

$$\vec{x}_i = (x_{1,i}, x_{2,i}, \dots, x_{n,i}) \text{ и } \vec{x}_j = (x_{1,j}, x_{2,j}, \dots, x_{n,j}).$$

**Евклидово расстояние :**

$$d(\vec{x}_i, \vec{x}_j) = \sqrt{\sum_{l=1}^n (x_{l,i} - x_{l,j})^2}, \quad (147)$$

которое является для нас естественным способом измерения в расстояний.

**Взвешенное евклидово расстояние :**

$$d(\vec{x}_i, \vec{x}_j) = \sqrt{\sum_{l=1}^n \omega_l^2 (x_{l,i} - x_{l,j})^2}, \quad (148)$$

где  $\omega_l$  - весовой множитель, учитывающий вклад  $l$ -го признака в оценку близости объектов.

**$L_1$ -норма или манхеттеновское расстояние :**

$$d(\vec{x}_i, \vec{x}_j) = \sum_{l=1}^n |(x_{l,i} - x_{l,j})|, \quad (149)$$

когда расстояние между объектами измеряется по направлениям, параллельным осям координат.

Существуют и другие эвристические меры, которые не являются расстоянием, с точки зрения вышесказанного определения, но которые также можно использовать качестве характеристики меры близости объектов. Например, коэффициент дивергенции:

$$CD(\vec{x}_i, \vec{x}_j) = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \left( \frac{(x_{l,i} - x_{l,j})}{(x_{l,i} + x_{l,j})} \right)^2}. \quad (150)$$

В случае большой размерности пространства признаков, когда наглядное геометрическое представление объектов не представляется возможным, удобным способом представления и оценки свойств  $i$ -го класса является нахождение **матрицы расстояний**, характеризующей взаимные расстояния между парами объектов класса:

$$D_i = \begin{pmatrix} 0 & d_{1,2} & d_{1,3} & \dots & d_{1,N_i} \\ d_{2,1} & 0 & d_{2,3} & \dots & d_{2,N_i} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{N_i,1} & d_{N_i,2} & d_{N_i,3} & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad (151)$$

где  $N_i$  – количество объектов в  $i$ -м классе.

Матрица расстояний позволяет более наглядно представить взаимное расположение объектов в классе, выделить компактно расположенные подгруппы объектов, найти наиболее удаленные друг от друга объекты и т.п.

Другой мерой оценки близости объектов в пространстве признаков является мера сходства.

**Определение.** *Мерой сходства* называется однозначная неотрицательная функция двух аргументов  $s(x, y)$ , если для любых двух точек  $x$  и  $y$  выполняются условия:

1.  $s(x, y) = s(y, x)$  – свойство симметричности;
2.  $s(x, y) = 1$  тогда и только тогда, когда  $x \equiv y$ ;
3.  $s(x, y)$  ограничена для любых  $x$  и  $y$ :  $0 \leq s(x, y) \leq 1$ .

Аналогично, для характеристики близости класса объектов вводится понятие матрицы сходства:

$$S_i = \begin{pmatrix} 1 & s_{1,2} & s_{1,3} & \dots & s_{1,N_i} \\ s_{2,1} & 1 & s_{2,3} & \dots & s_{2,N_i} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{N_i,1} & s_{N_i,2} & s_{N_i,3} & \dots & 1 \end{pmatrix}. \quad (152)$$

В биологии и медицине встречаются ситуации, когда объекты можно считать близкими, хотя расстояние между ними в пространстве признаков является достаточно большим. Например, при характеристике телосложения важно соотношение размеров, хотя абсолютные значения роста, веса и т.п. могут различаться значительно. В этом случае, в качестве меры сходства можно использовать функцию вида:

$$s(\vec{x}_i, \vec{x}_j) = \frac{\vec{x}_i^T \cdot \vec{x}_j}{\|\vec{x}_i\| \cdot \|\vec{x}_j\|}. \quad (153)$$

Она определяет в качестве меры близости величину косинуса угла между направлениями на соответствующие объекты.

В классификации видов животных и растений часто используется мера сходства Танимото, которую удобно применять, если признаки, описывающие класс, логические:

$$s(\vec{x}_i, \vec{x}_j) = \frac{\vec{x}_i^T \cdot \vec{x}_j}{\vec{x}_i^T \cdot \vec{x}_i + \vec{x}_j^T \cdot \vec{x}_j - \vec{x}_i^T \cdot \vec{x}_j}. \quad (154)$$

С точки зрения анализа взаиморасположения объектов в пространстве признаков расстояние и мера сходства эквивалентны друг другу по информативности, в частности:

$$d(x, y) = \frac{1}{1 + s(x, y)}. \quad (155)$$

Видно, что чем больше расстояние между объектами в пространстве признаков, тем меньше между ними сходство и наоборот.

## Расстояние от точки до множества и внутримножественное расстояние

Используя любую из приведенных выше формул, всегда можно оценить расстояние (или меру сходства) между заданными объектами класса. Другой задачей является задача оценки расстояния от объекта  $\vec{x}$  до множества объектов  $\{\vec{x}_i\}$ , представляющих класс  $A_i$ . Поскольку объект задается точкой в пространстве признаков, а класс объектов представляет собой множество точек, то это задача не имеет однозначного решения и можно предложить различные способы оценки расстояния от точки до множества. Для удобства записи, в дальнейшем будем использовать не само расстояние, а квадрат расстояния  $d^2$ . Поскольку расстояние неотрицательная величина, то возведение ее в квадрат, сохраняет все исходные соотношения между объектами класса.

- Расстояние от объекта до множества определяют как расстояние от объекта  $\vec{x}$  до ближайшего к нему объекта  $\vec{x}_i$ , принадлежащего множеству  $\{\vec{x}_i\}$ , т.е. до границы области, занимаемой классом  $A_i$ .

$$d^2(\vec{x}, A_i) = \min_{i=1, N_i} d^2(\vec{x}, \vec{x}_i). \quad (156)$$

- Расстояние от объекта до множества определяют как расстояние до некоторого эталонного элемента  $\vec{x}_{эм}$  множества, наиболее полно характеризующего свойства класса  $A_i$ :

$$d^2(\vec{x}, A_i) = d^2(\vec{x}, \vec{x}_{эм}). \quad (157)$$

В качестве такого эталона можно использовать, например, центр класса:

$$\vec{x}_{эм} = \frac{1}{N_i} \sum_{i=1}^{N_i} \vec{x}_i. \quad (158)$$

- Расстояние от объекта до множества определяют как среднее расстояние до некоторого множества эталонных элементов множества.

$$d^2(\vec{x}, A_i) = \frac{1}{N_{i,эм}} \sum_{i=1}^{N_{i,эм}} d^2(\vec{x}, \vec{x}_{i,эм}). \quad (159)$$

Такой способ определения расстояния используется в случаях, когда трудно выделить единственный эталон в классе. В частности,

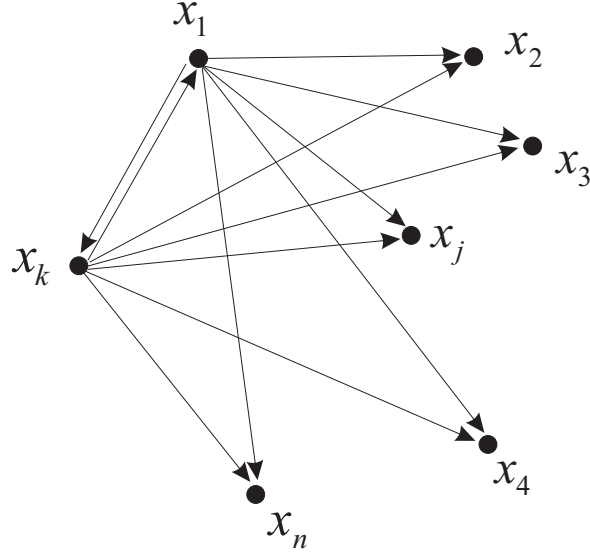


Рис. 23. К определению внутримножественного расстояния

в качестве эталонных объектов  $\vec{x}_{i,эм}$  можно рассматривать и все объекты класса.

Для характеристики меры компактности области, занимаемой объектами класса, используется понятие **внутримножественного расстояния**. Оно определяется следующим образом (рис. 23). Находится среднее расстояние от каждого объекта  $\vec{x}_j$  множества до всех оставшихся объектов этого множества:

$$d^2(\vec{x}_j, \{\vec{x}_i\}) = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N-1} d^2(\vec{x}_j, \vec{x}_i). \quad (160)$$

В полученном выражении сумму по  $i$  можно распространить до  $N$ , т.к. при этом добавляется слагаемое вида  $d^2(\vec{x}_i, \vec{x}_i)$ , которое дает нулевой вклад. Затем полученный набор средних расстояний усредняется:

$$\overline{d^2(\{\vec{x}_j, \vec{x}_i\})} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N d^2(\vec{x}_j, \{\vec{x}_i\}). \quad (161)$$

В случае евклидова расстояния можно показать, что внутримножественное расстояние будет равно удвоенной сумме дисперсий признаков, характеризующих класс объектов:

$$\overline{d^2(\{\vec{x}_j, \vec{x}_i\})} = \frac{2N}{N-1} \sum_{l=1}^n (\overline{x_l^2} - \overline{x_l}^2) = 2 \sum_{l=1}^n \sigma_l^2. \quad (162)$$

Аналогично, различным образом можно определить и расстояние между классами объектов. Оно может быть вычислено, как:

- наименьшее расстояние между объектами, принадлежащими к разным классам (между границами классов);
- расстояние между эталонными объектами классов (центрами классов);
- усредненное расстояние между всевозможными парами объектов, принадлежащих различным классам.

Важно, чтобы выбор способа определения расстояния способствовал корректному решению задач распознавания и классификации.

## **Контрольные вопросы и задания**

1. Предложите эвристическое правило распознавания трех классов, объектами которых являются соответственно цифры 1, 2 и 3 .

2. Для распознавания классов объектов: "мужчины" и "женщины" могут быть использованы статистические признаки "рост" и "высота каблуков". Обоснуйте, почему совместное использование этих признаков может ухудшать качество распознавания.

3. Поясните, в чем отличие кластера от класса объектов?

4. Расстояние между двумя классами измерено двумя способами: 1 – расстояние между центрами классов, 2 – расстояние между границами классов. В чем преимущества и недостатки каждого из методов измерения?

# Лекция 11. Геометрический подход к принятию решений

## Линейные дискриминантные функции

Решение задач классификации объектов заключается в задании некоторого правила, позволяющего каждый объект, предъявляемый для распознавания, относить к тому или иному классу. В геометрическом подходе к распознаванию эти правила носят название **дискриминантных или решающих функций**. Геометрическая интерпретация правила классификации проиллюстрирована на рисунке 24.

Граница между областями  $A_1$  и  $A_2$  может быть задана как некоторая линия, уравнение которой в общем виде будет иметь вид  $d(\vec{x}) = 0$ . Определим функцию  $d(\vec{x})$  таким образом, чтобы условию  $d(\vec{x}) > 0$  удовлетворяла полуплоскость, содержащая класс  $A_1$ , а  $d(\vec{x}) < 0$  — полуплоскость, содержащая класс  $A_2$ .

Таким образом, для распознавания, к какому из двух классов относится вновь предъявляемый объект  $\vec{x}$ , достаточно воспользоваться следующим правилом:

$$\begin{cases} \vec{x} \in A_1, & \text{если } d(\vec{x}) > 0 \\ \vec{x} \in A_2, & \text{если } d(\vec{x}) < 0 \end{cases} \quad (163)$$

В случае, когда признаки объекта, предъявляемого для распознавания, удовлетворяют условию  $d(\vec{x}) = 0$ , распознавание невозможно без привлечения дополнительной информации. Качество распознавания существенно зависит от вида функции  $d(\vec{x})$  и практической возможности определения ее параметров.

Наиболее простой вид имеют линейные дискриминантные функции (ЛДФ). Пусть объекты характеризуются  $n$  признаками  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Удобно использовать векторную форму записи, рассматривая объект как



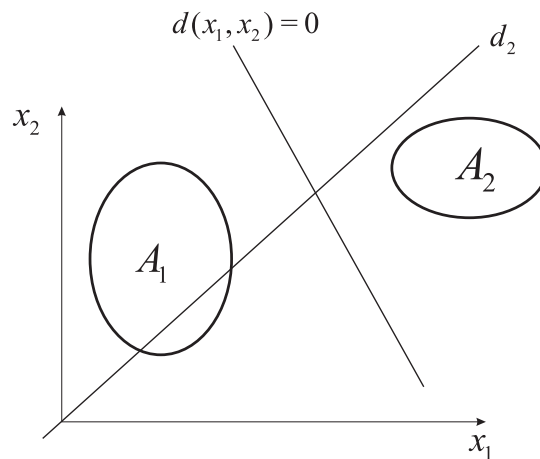


Рис. 24. Линейные дискриминантные функции

вектор-столбец параметров:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}. \quad (164)$$

Тогда **линейная дискриминантная функция** может быть определена следующим образом:

$$d(\vec{x}) = \vec{\omega}^T \vec{x} = \omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \dots + \omega_n x_n, \quad (165)$$

где  $\vec{\omega}^T = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$  – транспонированный вектор весовых коэффициентов линейной дискриминантной функции.

Линия определяющая границу между классами, в случае задания ЛДФ формулой (165) всегда проходит через начало координат (прямая  $d_2$ , на рис. 24), что не всегда позволяет успешно провести разделение классов. Тем не менее видно, что линейная граница между классами существует (прямая  $d(x_1, x_2)$ ). Поэтому рассматривают пополненное пространство признаков, которое образуется в результате добавления всем рассматриваемым объектам еще одного формального признака  $x_0$ , значения которого у объектов всех классов тождественно равны 1. Так как признак имеет одинаковое значение у всех объектов, это не скажется на качестве распознавания, однако пополнение пространства признаков приведет к тому, что дискриминантная функция не будет проходить че-

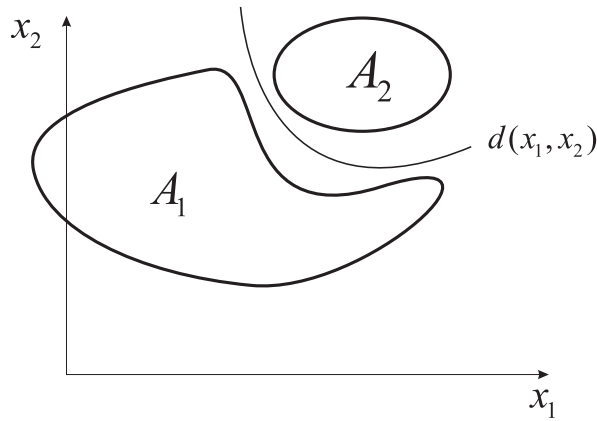


Рис. 25. Неразделимость классов с помощью ЛДФ

рез начало координат (случай  $\omega_0 \neq 0$ ):

$$d(\vec{x}) = \vec{\omega}^T \vec{x} = \omega_0 + \omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \dots + \omega_n x_n = \sum_{i=0}^n \omega_i x_i = \vec{\omega}^T \vec{x}, \quad (166)$$

где

$$\vec{\omega}^T = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Преимущество использования ЛДФ в том, что они достаточно просты и для них разработаны хорошие математические и компьютерные средства их построения и анализа. Однако для многих задач распознавания они не позволяют провести качественное распознавание, хотя классы объектов являются разделимыми (рис. 25).

Если области, занимаемые классами объектов в пространстве признаков не позволяют провести линейные границы между ними, для решения задачи классификации можно воспользоваться понятием **обобщенной линейной дискриминантной функции** (ОЛДФ), которая определяется следующим образом:

$$d_{об}(\vec{x}) = \sum_{i=0}^k \omega_i f_i(\vec{x}), \quad (167)$$

где  $f_i(\vec{x})$  – некоторые однозначные функции признаков объекта. Вид их выбирается различным образом, исходя из возможности решения задачи классификации, и может быть достаточно сложен. Тем не менее,

ОЛДФ можно рассматривать как линейную функцию в  $(k + 1)$ -мерном пространстве. Координаты вектора  $x_{об}$ , характеризующие объект в этом обобщенном пространстве признаков, вычисляются по исходному набору признаков  $\vec{x}$ :

$$\vec{x}_{об} = \begin{pmatrix} 1 \\ f_1(\vec{x}) \\ f_2(\vec{x}) \\ \dots \\ f_n(\vec{x}) \end{pmatrix}. \quad (168)$$

Такое обобщение понятия линейной дискриминантной функции позволяет существенно расширить круг задач, решаемых с использованием всех свойств, справедливых для ЛДФ.

Используются два подхода к выбору обобщенных признаков.

- Обобщенные признаки  $f_i$  строятся на основе неформального анализа исходного пространства признаков. В медицинских задачах это, прежде всего, нахождение синдромов – таких комбинаций признаков, которые присущи именно данному заболеванию (классу объектов); вычисление различных клинических, биохимических индексов из измеренных показателей и т.п. В результате этого можно существенно уменьшить размерность исходного пространства признаков.
- Обобщенные признаки строятся формально, с использованием классов функций определенного вида. Наиболее часто для этих целей используются полиномы. Пусть  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  набор признаков объекта в исходном  $n$ -мерном пространстве признаков. ЛДФ в этом пространстве определяется формулой (165). Построим из исходных признаков квадратичную функцию:

$$d_2(\vec{x}) = \sum_{i=0}^n \omega_i x_i + \sum_{i,j=1}^n \omega_{i,j} x_i x_j. \quad (169)$$

Ее можно рассматривать как линейную в пространстве признаков:  $\{1, x_1, x_2, \dots, x_n, x_1^2, x_1 x_2, \dots, x_i x_j, \dots, x_n^2\}$ , а общее количество обобщенных признаков равно:  $k = 1 + n + n(n - 1)/2 + n$ . Аналогично, можно построить решающие функции на основе полиномов и более высокого порядка. Как правило при этом происходит увеличение размерности пространства признаков, что, в свою очередь, значительно увеличивает количество вычислений в процессе решения задачи распознавания.

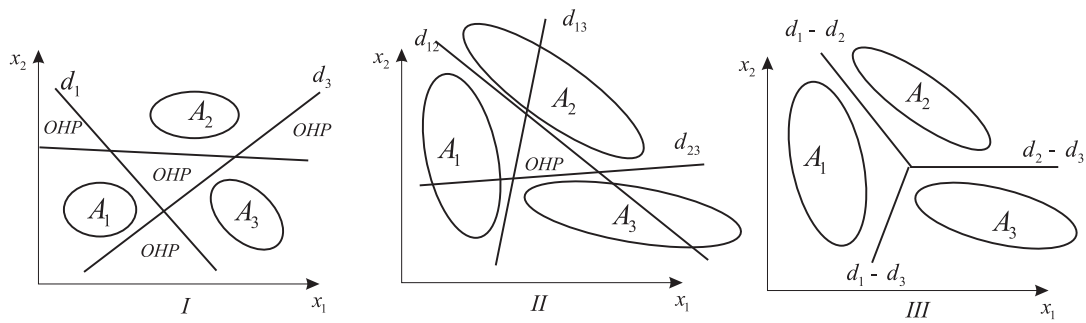


Рис. 26. Случаи линейной разделимости классов

Рассмотрим случаи, когда возможно решение задач распознавания  $M$  классов объектов с использованием ЛДФ.

**Случай I.** Каждый из  $M$  классов объектов может быть отделен от всех остальных классов одной разделяющей границей  $d_i(\vec{x})$  (рис. 26-I). Правило классификации будет формулироваться следующим образом:

$$\vec{x} \in A_i, \text{ если } \begin{cases} d_i(\vec{x}) > 0, \\ d_j(\vec{x}) \leq 0, \text{ для } \forall j \neq i. \end{cases} \quad (170)$$

Предлагаемое правило классификации не позволяет решить задачу распознавания для некоторых областей пространства признаков (а не только для точек принадлежащих границам  $d_i(\vec{x}) = 0$ ). Такие области называют областями непринятия решения (ОНР). Тем не менее, нахождение классифицируемого объекта в некоторых из ОНР позволяет исключить его принадлежность к определённому классу, т.е. частично решить задачу классификации.

**Случай II.** (Попарной разделимости классов). Каждый из  $M$  классов отделяется от каждого из остальных классов индивидуальной разделяющей функцией  $d_{ij}(\vec{x})$  (рис. 26-II). Граница между классами  $A_i$  и  $A_j$  определяется условием  $d_{ij}(\vec{x}) = 0$ . Таким образом, для отделения объектов какого-либо класса от остальных требуется  $(M - 1)$  дискриминантная функция. Правило классификации будет иметь вид:

$$\vec{x} \in A_i, \text{ если } d_{ij}(\vec{x}) > 0, \text{ для } \forall j \neq i. \quad (171)$$

В целом, для решения задачи классификации требуется  $M(M - 1)$  ЛДФ. С учетом, что разделяющие функции обладают свойством антисимметрии  $d_{ij} = -d_{i,j}$ , общее их количество можно уменьшить вдвое. Нетрудно убедиться, что ОНР в случае попарной разделимости классов представляет собой только ограниченное множество (и, разумеется, сами границы).

**Случай III.** (Общий случай делимости классов.) Для каждого из  $M$  классов можно определить свою дискриминантную функцию  $d_i(\vec{x})$ . Правило классификации задается следующим образом:

$$\vec{x} \in A_i, \text{ если } d_i(\vec{x}) > d_j(\vec{x}), \text{ для } \forall j \neq i. \quad (172)$$

Видно, что для принятия решения о принадлежности объекта к  $i$ -му классу требуется, чтобы значение соответствующей функции было больше, чем значения всех остальных дискриминантных функций. Этот случай наиболее общий, однако он не имеет наглядного геометрического представления для ЛДФ. Если положить  $d_{ij}(\vec{x}) = d_i(\vec{x}) - d_j(\vec{x})$ , то видно, что данный случай представляет собой обобщение случая II. При выборе дискриминантных функций такого вида, ОНР соответствует только самим границам между классами (рис. 26-III).

Если какой-либо из перечисленных выше трех случаев выбора дискриминантных функций позволяет решать задачу распознавания, то говорят, что классы линейно делимы.

## Классификация по принципу минимума расстояния

Понятие расстояния позволяет эффективно решать задачи распознавания объектов. Общая идея распознавания базируется на том, что любой объект  $\vec{x}$  будет относиться к тому из классов  $A_i$  расстояние до которого минимально:

$$\vec{x} \in A_i, \text{ если } d(\vec{x}, A_i) < d(\vec{x}, A_j), \text{ для } \forall j \neq i. \quad (173)$$

Причем в качестве  $d(\vec{x}, A)$  можно выбрать любое расстояние, которое можно определить в пространстве признаков. Критерием обоснованности выбора служит только качество распознавания, полученное в результате его применения. Такой подход к распознаванию называется **правилом ближайшего соседа** или 1БС-правило: каждый объект будет относиться к тому классу, к которому относится его ближайший сосед. Причем под соседями могут пониматься как исходные объекты классов, так и некоторые эталонные объекты (например, центры классов). Алгоритм ближайшего соседа можно обобщить на  $q$ БС-правило: определяется  $q$  ближайших к объекту  $\vec{x}$  соседей и сам объект заносится в тот класс, к которому относится наибольшее число его соседей из полученной группы. В случае двух классов объектов удобно, чтобы  $q$  было

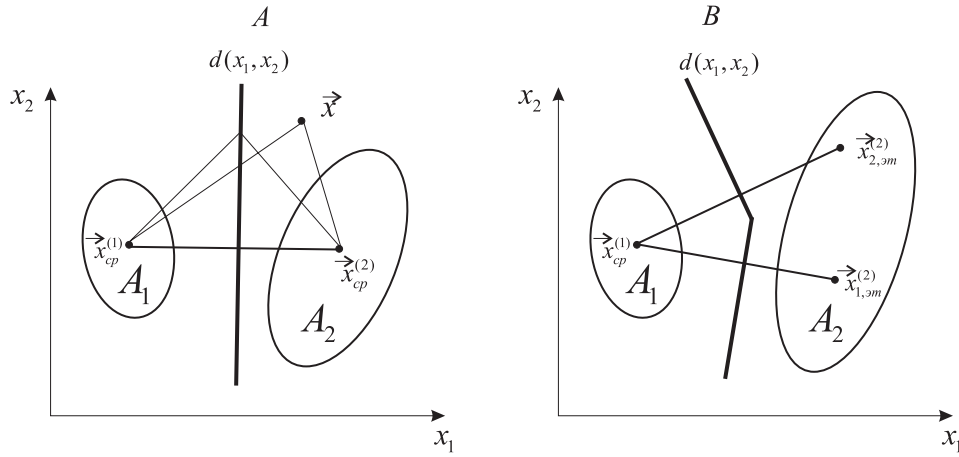


Рис. 27. Построение ЛДФ по принципу минимума расстояния

нечетное. Недостаток подобных методов в том, что каждый раз требуется вычислять все расстояния между вновь классифицируемым объектом и объектами представляющими классы, а их число может быть очень велико. С этой точки зрения, построение дискриминантных функций для решения задач классификации будет предпочтительней, поскольку они строятся по обучающей выборке только один раз.

Рассмотрим, как можно построить линейную дискриминантную функцию для классификации двух классов объектов  $A_1$  и  $A_2$ . Поскольку граница между классами может быть проведена различным образом, то необходимо задать какое либо условие ее оптимального проведения. Зададим это условие из требования минимума расстояния (173). Выберем в качестве эталонных представителей центры классов:

$$\vec{x}_{cp}^{(1)} = \frac{1}{N_1} \sum_{i=1}^{N_1} \vec{x}_i^{(1)}, \quad \vec{x}_{cp}^{(2)} = \frac{1}{N_2} \sum_{i=1}^{N_2} \vec{x}_i^{(2)}, \quad (174)$$

Определим границу между классами как линию (рис. 27), каждая точка которой находится на одинаковом расстоянии от эталонных представителей классов. Уравнение такой линии может быть получено из равенства

$$d(\vec{x}, \vec{x}_{cp}^{(1)}) = d(\vec{x}, \vec{x}_{cp}^{(2)}). \quad (175)$$

Рассмотрим случай евклидова расстояния в двумерном пространстве признаков  $\{x_1, x_2\}$ :

$$\sqrt{(x_1 - x_{1,cp}^{(1)})^2 + (x_2 - x_{2,cp}^{(1)})^2} = \sqrt{(x_1 - x_{1,cp}^{(2)})^2 + (x_2 - x_{2,cp}^{(2)})^2} \quad (176)$$

Возведя обе части равенства в квадрат, раскрыв скобки и приведя подобные, получим:

$$\begin{aligned} & \left\{ [(x_{1,cp}^{(1)})^2 + (x_{2,cp}^{(1)})^2] - [(x_{1,cp}^{(2)})^2 + (x_{2,cp}^{(2)})^2] \right\} + \\ & + 2[x_{1,cp}^{(2)} - x_{1,cp}^{(1)}]x_1 + 2[x_{2,cp}^{(2)} - x_{2,cp}^{(1)}]x_2 = 0 \quad . \end{aligned} \quad (177)$$

Выражение (177) представляет собой ЛДФ  $d(\vec{x}) = \omega_0 + \omega_1 x_1 + \omega_2 x_2$ , если положить:

$$\begin{aligned} \omega_0 &= [(x_{1,cp}^{(1)})^2 - (x_{1,cp}^{(2)})^2] + [(x_{2,cp}^{(1)})^2 - (x_{2,cp}^{(2)})^2]; \\ \omega_1 &= 2[x_{1,cp}^{(2)} - x_{1,cp}^{(1)}]; \\ \omega_2 &= 2[x_{2,cp}^{(2)} - x_{2,cp}^{(1)}]. \end{aligned} \quad (178)$$

В случае  $n$  признаков коэффициенты ЛДФ вычисляются аналогично:

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \sum_{l=1}^n [(x_{l,cp}^{(1)})^2 - (x_{l,cp}^{(2)})^2]; \\ \omega_l &= 2[x_{l,cp}^{(2)} - x_{l,cp}^{(1)}]. \end{aligned}$$

Из способа получения ЛДФ следует, что граница между классами представляет собой серединный перпендикуляр к отрезку, соединяющему эталоны классов (рис. 27-А). Если класс определяется не одним эталоном, то граница между классами будет некоторая ломаная линия. На рисунке 27-В рассмотрен случай, когда класс  $A_2$  задан двумя эталонными элементами. Если эталонных представителей у каждого из классов больше, то форма границы будет сложной кусочно-линейной ломаной линией.

## Обучение распознаванию: алгоритм перцептрона

Рассмотрим другой подход к построению правила классификации, основанный не на критерии минимума расстояния, а на требовании минимизации ошибок распознавания. Идея построения алгоритма распознавания основана на том, что первоначально задается, произвольная дискриминантная функция и в процессе последовательного предъявления элементов обучающей выборки производится исправление весовых коэффициентов, в зависимости от правильного или ошибочного решения.

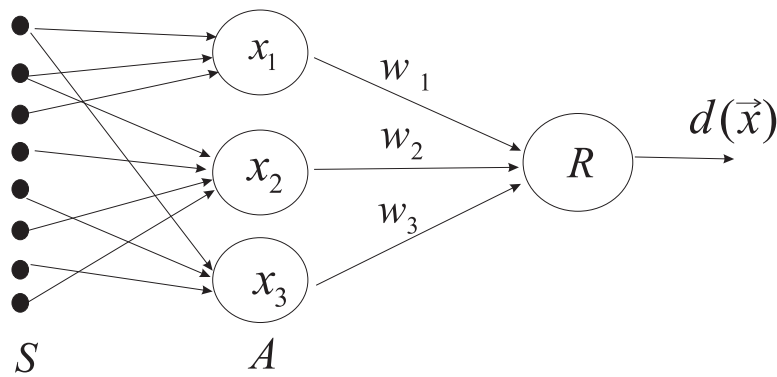


Рис. 28. Схема перцептрона

Как правило, для получения качественного распознавания элементы обучающей выборки должны предъявляться неоднократно. Для верификации полученного правила классификации предъявляются объекты, не входящие в обучающую выборку (верифицирующая выборка): если количество ошибок минимально и качество распознавания удовлетворяет поставленным целям, то обучение считается успешным. Общая стратегия обучения распознаванию строится по принципу обратной связи.

Первые устройства, позволяющие классифицировать объекты после процесса обучения, были предложены Ф.Розенблаттом в 1959 году и названы *перцептронами* (от латинского *perceptio* – восприятие) и были предназначены для распознавания зрительных объектов. Устройство состоит из двух слоев датчиков (рис. 28) и решающего устройства. Слой сенсорных элементов  $S$  случайным образом соединен с ассоциативными элементами  $A$ . Сенсоры представляют собой некоторые измерительные устройства (например, фотодиоды), позволяющие воспринимать физический сигнал из внешней среды. Каждый ассоциативный элемент воспроизводит выходной сигнал  $x_i$ , если достаточное число сенсоров, соединенных с ним, находится в возбужденном состоянии. Реакция решающего устройства  $R$  системы на предъявленный объект пропорциональна сумме вкладов ассоциативных элементов, взятых с определенными весами  $\omega_i$ . Обучение заключается в подборе весовых коэффициентов  $\omega_i$  таким образом, чтобы выходной сигнал принимал положительные значения при предъявлении объектов одного класса и отрицательные значения для объектов другого класса. В частности, если выходной сигнал является напряжением, то в качестве регуляторов весовых коэффициентов можно применить реостаты. Для правильного распознавания обучающую выборку предъявляют многократно, добиваясь того, чтобы свести к мини-



муму ошибки распознавания.

Рассмотрим математический подход реализующий алгоритм перцептрона. Пусть задано обучающее множество, представляющее классы  $A_1$  и  $A_2$  и произвольная линейная дискриминантная функция  $d(\vec{x})$ :

$$d(\vec{x}) = \sum_{i=0}^n \omega_i^T x_i. \quad (179)$$

Под произвольным заданием ЛДФ понимается произвольное задание вектора весовых коэффициентов  $\vec{\omega}(1)$  на первом шаге процедуры обучения, в частности это может вектор с нулевыми значениями признаков.

Предъявим первый объект  $\vec{x}(1)$  из обучающей выборки для распознавания. Пусть для определенности он принадлежит классу  $A_1$ . Правильное его распознавание заключается в положительном значении дискриминантной функции для данного объекта. Таким образом, если  $\vec{x}(1) \in A_1$  и в то же время выполняется условие  $\vec{\omega}^T(1) \vec{x}(1) > 0$ , то дискриминантная функция (179) правильно распознает объект  $\vec{x}(1)$  и, следовательно, ее дообучение не требуется, т.е. вектор весовых коэффициентов остается без изменения на следующем шаге обучения  $\vec{\omega}(2) = \vec{\omega}(1)$ .

Если же  $\vec{x}(1) \in A_1$  и в то же время выполняется условие  $\vec{\omega}^T(1) \vec{x}(1) \leq 0$ , то такая дискриминантная функция неправильно распознает объект  $\vec{x}(1)$  и, следовательно, вектор весовых коэффициентов  $\vec{\omega}(1)$  нужно изменить так (дообучить), чтобы значение дискриминантной функции увеличилось. Например, изменить вектор весовых коэффициентов следующим образом:  $\vec{\omega}(2) = \vec{\omega}(1) + c \vec{x}(1)$ , где  $c$  – некоторое положительное корректирующее приращение. Такое изменение весовых коэффициентов можно рассматривать как обучение. Действительно,

$$\vec{\omega}^T(2) \vec{x}(1) = (\vec{\omega}^T(1) + c \vec{x}^T(1)) \vec{x}(1) = \underbrace{\vec{\omega}^T(1) \vec{x}(1)}_{\leq 0} + c \underbrace{\vec{x}^T(1) \vec{x}(1)}_{> 0}.$$

Видно, что значение дискриминантной функции для неверно распознаваемого объекта стало больше, что можно интерпретировать как улучшение распознавания, т.е. обучение.

Если объект принадлежит классу  $A_2$ , то правильное его распознавание заключается в выполнении условия  $\vec{\omega}^T(1) \vec{x}(1) < 0$  и дообучение дискриминантной функции в этом случае не требуется  $\vec{\omega}(2) = \vec{\omega}(1)$ . Если же  $\vec{x}(1) \in A_2$  и в то же время  $\vec{\omega}^T(1) \vec{x}(1) > 0$ , то такая дискриминантная функция неправильно распознает объект  $\vec{x}(1)$  и ее необходи-

мо дообучить, чтобы значение дискриминантной функции уменьшилось:  
 $\vec{\omega}(2) = \vec{\omega}(1) - c\vec{x}(1)$ .

Далее предъявляется следующий объект обучающей выборки  $\vec{x}(2)$  и процедура коррекции весов продолжается до тех пор, пока не переберутся все объекты обучающей выборки. Обучение заканчивается, когда полученная дискриминантная функция будет правильно классифицировать максимальное количество объектов обучающей выборки. Как правило, приходится неоднократно предъявлять обучающую выборку для построения хорошей решающей функции. Доказано, что алгоритм перцептрона сходится за конечное число итераций, если классы линейно разделимы.

На практике наиболее употребительна следующая эквивалентная форма алгоритма перцептрона. Если умножить признаки объектов второго класса на  $-1$ , то процедура коррекции весов на  $(k)$ -м шаге обучения будет определяться выражением:

$$\vec{\omega}(k+1) = \begin{cases} \vec{\omega}(k), & \text{если } \vec{\omega}^T(k)\vec{x}(k) > 0 \\ \vec{\omega}(k) + c\vec{x}(k), & \text{если } \vec{\omega}^T(k)\vec{x}(k) \leq 0 \end{cases} \quad (180)$$

вне зависимости от того, к какому классу принадлежит объект.

Варьируя выбор корректирующего приращения  $c$ , получают различные модификации алгоритма перцептрона:

**Алгоритм фиксированного приращения.** На каждом шаге процедуры обучения величину корректирующего приращения оставляют неизменной  $c = const$ . Если величина выбрана неудачно, то результат обучения может оказаться неоптимальным.

**Алгоритм коррекции абсолютной величины.** На каждом шаге итерационной процедуры  $c$  выбирается таким, чтобы гарантировать правильную классификацию объекта после коррекции весов, т.е. требуется выполнение условия  $\vec{\omega}^T(k) + c\vec{x}^T(k) > 0$ . Этого можно достичь задавая в качестве  $c$  любое число, удовлетворяющее условию

$$c > \frac{|\vec{\omega}^T(k)\vec{x}(k)|}{\vec{x}^T(k)\vec{x}(k)}.$$

Следует отметить, что такая процедура обучения является очень жесткой, в смысле больших изменений дискриминантной функции на отдельных шагах обучения, что может не позволить получить наилучшую ЛДФ для случаев близко расположенных классов объектов обучающей выборки.

**Алгоритм дробной коррекции.** На каждом шаге итерационной процедуры  $c$  выбирается из условия:

$$c = \lambda \frac{|\vec{\omega}^T(k) \vec{x}(k)|}{\vec{x}^T(k) \vec{x}(k)},$$

т.е. величина дообучения ЛДФ пропорциональна величине отклонения неправильно распознаваемого объекта от соответствующего класса. Обычно величина  $\lambda$  задается в интервале от 0 до 2.

В алгоритмах коррекции в качестве начального вектора весов  $\vec{\omega}$  нельзя использовать нулевой вектор.

Рассмотрим алгоритм перцептрона в случае обучения для объектов, относящихся к  $M$  различным классам. В наиболее общем случае обучение распознаванию будет заключаться в нахождении  $M$  дискриминантных функций  $d_i(\vec{x})$  таких, что

$$\vec{x} \in A_i, \text{ если } d_i(\vec{x}) > d_j(\vec{x}), \text{ для } \forall j \neq i. \quad (181)$$

Алгоритм заключается в следующих шагах:

1. Задаются произвольно  $M$  векторов весовых коэффициентов  $\vec{\omega}_i, i = \overline{1, M}$  дискриминантных функций:

$$d_i(\vec{x}) = \sum_{j=0}^n \omega_{ij}^T x_j = \vec{\omega}_i^T \vec{x}. \quad (182)$$

2. На  $k$ -м шаге итерационной процедуры вычисляются  $M$  дискриминантных функций:

$$d_i(\vec{x}(k)) = \vec{\omega}_i^T(k) \vec{x}(k). \quad (183)$$

3. Проводится процедура обучения.

Если  $\vec{x}(k) \in A_i$  и  $d_i(\vec{x}(k)) > d_j(\vec{x}(k))$  для  $\forall j \neq i$ , то весовые коэффициенты всех дискриминантных функций не изменяются:

$$\vec{\omega}_l(k+1) = \vec{\omega}_l(k), \quad l = \overline{1, M}.$$

Если для  $l$ -я дискриминантной функции выполняется условие  $d_i(\vec{x}(k)) < d_l(\vec{x}(k))$ , то производится коррекция весов как  $i$ -й так и  $l$ -й дискриминантных функций:

$$\begin{aligned} \vec{\omega}_i(k+1) &= \vec{\omega}_i(k) + c \vec{x}(k), \\ \vec{\omega}_l(k+1) &= \vec{\omega}_l(k) - c \vec{x}(k). \end{aligned} \quad (184)$$

В случае линейной делимости классов данный алгоритм сходится за конечное число итераций, в противном случае достигается минимальное число ошибок распознавания объектов обучающей выборки.

## **Кластеризация. Оценка качества кластеризации**

В случае обучения распознаванию "без учителя" неизвестно количество классов, которое может содержать обучающая выборка. Поэтому требуется предварительно определить их количество. Очевидно, что в зависимости от способа определения меры близости объектов, алгоритма классификации и т.п., можно получить различные варианты разбиения исходной выборки на отдельные подгруппы. Причем может получаться как различное распределение объектов по группам, так и различное количество самих групп. Подобное представление обучающей выборки в виде некоторых подгрупп объектов называется *кластеризацией*, а множество объектов, объединенных по какому-либо набору свойств или правилу называется *кластером*.

Нетрудно увидеть близость понятий кластера и класса объектов. Тем не менее, между ними можно провести четкое различие. Как правило, под классом понимают некоторую совокупность объектов, объективно отражающую существо решаемой проблемы (например, классы "больные - здоровые" в задаче диагностики заболевания). В то время, как кластер — это совокупность объектов, полученная в результате применения некоторого формального аппарата группировки объектов. Применение любого алгоритма всегда позволит разбить исходную совокупность объектов на отдельные подгруппы (кластеры), однако вопрос об их числе, а также о соответствии такого разбиения сути проблемы требует дополнительного обоснования.

Основные вопросы, возникающие при проведении кластерного анализа следующие:

***Как установить подобие элементов?*** Мерой подобия элементов наиболее естественно выбрать расстояние. Если оно выбрано достаточно удачно, то можно ожидать, что расстояния между элементами внутри одного кластера будут гораздо меньше, чем расстояния между элементами разных кластеров. Затем выбирается какой-либо из алгоритмов кластеризации. Если количество кластеров наперед неизвестно, то нужно очень тщательно подходить к выбору параметров кластеризации, т.к. диапазон

возможных результатов может варьироваться от одного кластера (когда все элементы рассматриваются как один класс) до случая, когда каждый объект рассматривается как отдельный кластер. На получаемые результаты будет существенно сказываться также и выбор вида расстояния. Например, евклидово расстояние предполагает, что все признаки равнозначны. Однако в биомедицинских системах такое равноправие признаков встречается очень редко, поскольку физический и биологический смысл измеряемых параметров, диапазоны шкал различаются очень существенно. Кроме того, часто встречаются взаимозависимые признаки, что также отражается на результатах кластеризации.

**Как оценить качество группировки?** Пусть в результате применения некоторого алгоритма кластеризации получено разбиение исходного множества объектов на кластеры  $A_1, A_2, \dots, A_M$ . Оценить качество разбиения можно, задав некоторый критерий качества  $R$ , количественно характеризующий каждый вариант разбиения исходного множества на кластеры. А затем из полученных вариантов выбрать такое разбиение, которое будет соответствовать оптимальному значению критерия. Наиболее часто используемым критерием качества кластеризации является **критерий минимальной дисперсии**. Он определяется следующим образом: общая сумма дисперсий, т.е. сумма квадратов отклонений признаков всех объектов, входящих в кластеры от соответствующих центров кластеров, должна быть минимальна:

$$R = \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^{N_j} (\vec{x}_i^{(j)} - \vec{x}_{cp}^{(j)})^2 \rightarrow \min, \quad (185)$$

где  $N_j$  – количество объектов, отнесенных к  $j$ -му кластеру,  $\vec{x}_{cp}^{(j)}$  – центр  $j$ -го кластера.

Величина  $R$  будет зависеть как от количества, так и от состава кластеров, и задача заключается в определении кластеров таким образом, чтобы минимизировать  $R$ . Решение такой задачи всегда существует и может быть найдено, по крайней мере, простым перебором вариантов. Можно определить критерий качества и другими способами, например, как:

- минимум сумм средних квадратов расстояний между образами в кластерах;
- максимум сумм средних квадратов расстояний между образами,

принадлежащими различным кластерам.

После того, как получено наилучшее, с точки зрения используемого алгоритма кластеризации и критерия качества, разбиение исходного множества объектов на кластеры, требуется оценить насколько хорошо полученные результаты соответствуют цели распознавания. Если априорно известно сколько классов объектов и какие объекты к каким классам относятся, то для обоснования применения алгоритма бывает достаточно оценить процент правильного разнесения объектов по кластерам. Гораздо более сложная задача оценки эффективности использования алгоритма кластеризации возникает если ни количество классов, ни распределение объектов по классам неизвестно. Трудность заключается в том, что при большом числе признаков, характеризующих объект, невозможно зрительно представить результаты кластеризации. Поэтому применяются некоторые схемы оценок, которые косвенно позволяют получить представление о расположении кластеров в пространстве признаков. В качестве таких оценок используют числовые характеристики кластеров. Ими могут быть.

**Расстояние между центрами кластеров.** Пусть матрица расстояний между центрами пяти кластеров, полученных в результате реализации некоторого алгоритма имеет вид.

Кластеры	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$
$A_1$	0	4	15	5	30
$A_2$	4	0	12	3	41
$A_3$	15	12	0	14	35
$A_4$	5	3	14	0	50
$A_5$	30	41	35	50	0

Анализируя взаимные расстояния между кластерами, можно сделать вывод, что центры кластеров  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_4$  расположены сравнительно близко друг к другу, а кластер  $A_5$  находится достаточно далеко от остальных, поэтому следует проверить, не являются ли полученные группы кластеров элементами истинного описания.

**Количество элементов в кластере.** Если два кластера находятся достаточно близко друг от друга, причем элементов в одном гораздо меньше, чем в другом, то следует рассмотреть возможность их объединения в один кластер. Если кластер, удаленный от остальных содержит мало объектов, то всегда можно привести доводы в пользу

шума или ошибок измерения, хотя нельзя исключать, что это может быть и существенный, но редко встречающийся элемент истинного описания.

**Вариабельность показателей объектов кластера.** Анализ величины дисперсий признаков позволяет судить о форме области занимаемой кластером. Например, дисперсии кластеров  $A_1$  и  $A_2$  составляют:

Кластеры	$\sigma_1^2$	$\sigma_2^2$	$\sigma_3^2$	$\sigma_4^2$
$A_1$	1,2	0,9	0,7	1.0
$A_2$	3,5	4,4	17,6	2,8

Поскольку, каждая компонента дисперсии показывает рассеяние вдоль соответствующей оси, видно, что область, занимаемая кластером  $A_1$  по форме близка к сфере в четырехмерном пространстве, а область кластера  $A_2$  вытянута вдоль третьей координаты. Возможно, подобная информация будет полезна при оценке качества кластеризации.

**Оценка взаимных расстояний между объектами кластера.** Представление о ближайшем и наиболее удаленном объекте от центра кластера, нахождение наиболее удаленных друг от друга объектов – все это позволяет лучше оценивать результаты кластерного анализа.

## Алгоритмы кластеризации

В целом, задачу кластеризации удобно решать в режиме диалога: оценив неформально результаты на каком-либо шаге, ввести новые требования к качеству кластеризации, изменить параметры алгоритма кластеризации и т.д., до получения приемлемого результата с точки зрения поставленной цели.

Пусть  $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m$  – множество неклассифицированных объектов. Требуется провести их кластеризацию (классификацию), т.е. определить, какие объекты образуют отдельные кластеры. Возможны две ситуации: 1) количество кластеров, по которым следует распределить исходные объекты неизвестно и будет определяться самой процедурой кластеризации; 2) количество кластеров заранее задано.

Рассмотрим некоторые простые алгоритмы кластеризации.

### Алгоритм порогового расстояния.

1. Зададим некоторое пороговое расстояние  $\rho_0$ .
2. Выберем произвольный элемент множества объектов. Пусть это будет  $\vec{x}_1$  и назначим его центром первого кластера:  $\vec{x}_{cp}^{(1)} = \vec{x}_1$ .
3. Вычисляем расстояние от второго объекта до центра первого кластера  $d(\vec{x}_2, \vec{x}_{cp}^{(1)})$ .  
Если  $d(\vec{x}_2, \vec{x}_{cp}^{(1)}) \leq \rho_0$ , то будем относить объект  $\vec{x}_2$  к первому кластеру  $\vec{x}_2 \in A_1$ ;  
если  $d(\vec{x}_2, \vec{x}_{cp}^{(1)}) > \rho_0$ , то назначим  $\vec{x}_2$  центром второго кластера  $A_2$ :  $\vec{x}_{cp}^{(2)} = \vec{x}_2$ .
4. Вычисляем расстояния от следующего объекта до центров кластеров  $d(\vec{x}_3, \vec{x}_{cp}^{(1)})$ ,  $d(\vec{x}_3, \vec{x}_{cp}^{(2)})$ .  
Если  $d(\vec{x}_3, \vec{x}_{cp}^{(i)}) > \rho_0$ ,  $i = 1, 2$ , то назначим  $\vec{x}_3$  центром третьего кластера  $A_3$ :  $\vec{x}_{cp}^{(3)} = \vec{x}_3$ , иначе классифицируем объект по принципу минимума расстояния, т.е. будем относить объект  $\vec{x}_3$  к тому кластеру, расстояние до центра которого меньше.
5. Процедура повторяется для всех последующих объектов.

Результаты кластеризации существенно зависят как от выбора первого элемента, так и от выбора порогового расстояния. При малой величине  $\rho_0$  каждый объект может рассматриваться как отдельный кластер, а при большом значении  $\rho_0$ , вся исследуемая совокупность будет образовывать один кластер. Поэтому пороговое расстояние должно быть больше, чем типичные внутрикластерные расстояния, но меньше чем типичные межкластерные расстояния.

На практике проводят несколько вариантов кластеризации методом порогового расстояния с различными значениями  $\rho_0$ , различным выбором начального элемента, последовательности обхода объектов с последующим анализом полученных результатов по заданному критерию оптимизации. Удобство используемой процедуры кластеризации в скорости предварительной классификации: достаточно один раз предъявить каждый объект из исходной выборки для разбиения всего множества на кластеры.

### Алгоритм максиминного расстояния.



1. Выберем произвольный элемент множества объектов. Пусть это будет  $\vec{x}_1$  и назначим его центром первого кластера:  $\vec{x}_{cp}^{(1)} = \vec{x}_1$ .
2. Находим объект  $\vec{x}_i$ , наиболее удаленный от центра первого кластера  $\max_i d(\vec{x}_i, \vec{x}_{cp}^{(1)})$  и назначим его центром второго кластера  $\vec{x}_{cp}^{(2)} = \vec{x}_i$ .
3. Вычисляем пары расстояний от оставшихся объектов до центров полученных кластеров:  $d(\vec{x}_j, \vec{x}_{cp}^{(1)})$ ,  $d(\vec{x}_j, \vec{x}_{cp}^{(2)})$ ,  $j = \overline{1, m}$ .
4. В каждой паре находится минимальное расстояние  $\min_i \{d(\vec{x}_j, \vec{x}_{cp}^{(i)})\}$ .
5. Из полученных минимальных расстояний находится максимальное:  $\max_j \min_i \{d(\vec{x}_j, \vec{x}_{cp}^{(i)})\}$ .
6. Если  $\max_j \min_i \{d(\vec{x}_j, \vec{x}_{cp}^{(i)})\} > \frac{1}{2}d(\vec{x}_{cp}^{(1)}, \vec{x}_{cp}^{(2)})$ , то объект  $\vec{x}_j$  назначается центром третьего кластера  $\vec{x}_{cp}^{(3)} = \vec{x}_j$ , и процедура кластеризации повторяется с пункта 3 уже для центральных элементов трех кластеров;  
Если  $\max_j \min_i \{d(\vec{x}_j, \vec{x}_{cp}^{(i)})\} \leq \frac{1}{2}d(\vec{x}_{cp}^{(1)}, \vec{x}_{cp}^{(2)})$ , то все оставшиеся объекты относят к кластерам исходя из принципа минимума расстояния.

Иногда в качестве характерного внутрикластерного расстояния выбирают не половину максиминного расстояния, а какую-либо другую долю, например, одну треть. Результаты кластеризации будут зависеть также от выбора первого элемента.

### Алгоритм $K$ -групповых средних

В предыдущих алгоритмах количество кластеров, представляющих исходную выборку, определялось в процессе применения самой процедуры кластеризации. В алгоритме  $K$ -групповых средних предполагается, что количество кластеров, на которое следует разбить исходную выборку известно заранее. Действие алгоритма основано на минимизации критерия качества — суммы квадратов расстояний всех объектов входящих в кластер от центра кластера.

1. На первом шаге итерационной процедуры выбирается произвольно  $K$  объектов исходной выборки и назначаются центрами кластеров. Это могут быть, например, первые  $K$  объектов:  $\vec{x}_{cp}^{(i)}(1) = \vec{x}_i, i = \overline{1, K}$ .

2. Все оставшиеся элементы распределяются по кластерам на основе критерия минимума расстояния:

$$\vec{x}_j \in A_i, \text{ если } d(\vec{x}_j, \vec{x}_{cp}^{(i)}(1)) < d(\vec{x}_j, \vec{x}_{cp}^{(s)}(1)), \text{ для } \forall s \neq i.$$

3. На основе полученного разбиения объектов на кластеры определяются новые центры кластеров:

$$\vec{x}_{cp}^{(i)}(2) = \frac{1}{N_i} \sum_{j=1}^{N_i} \vec{x}_j^i(1), i = \overline{1, K}.$$

4. Все элементы исходного множества объектов снова перераспределяются по кластерам на основе критерия близости:

$$\vec{x}_j \in A_i, \text{ если } d(\vec{x}_j, \vec{x}_{cp}^{(i)}(2)) < d(\vec{x}_j, \vec{x}_{cp}^{(s)}(2)), \text{ для } \forall s \neq i.$$

5. Процедура кластеризации повторяется с пункта 3.

Критерием завершения кластеризации является выполнение условия:  $\vec{x}_{cp}^{(i)}(l+1) = \vec{x}_{cp}^{(i)}(l), i = \overline{1, K}$ , т.е. не происходит изменение центров кластеров и, соответственно, количества объектов в получаемых группах объектов. Переопределение центров кластеров таким образом приводит к минимизации суммы квадратов расстояний внутри каждого кластера. Качество кластеризации будет зависеть от выбора первых  $K$  центров кластеров.

### **Процедуры иерархической кластеризации.**

Иерархические алгоритмы предполагают выделение классов путем объединения объектов на основе их близости друг другу. Сначала каждый объект рассматривается как отдельный кластер, затем два ближайших по расстоянию объекта объединяются в один кластер и заменяются объектом описываемым центром полученного кластера. Далее процедура объединения ближайших объектов повторяется с учетом вновь образованного объекта до тех пор, пока все объекты не объединятся в один кластер. Существует большое число алгоритмов иерархической кластеризации: метод ближайшего соседа, метод дальнего соседа, центроидный метод, метод средней связи и т.п. Результаты работы иерархических алгоритмов представляются в виде графиков-дендрограмм по оси абсцисс которых, откладываются номера объектов, по оси ординат – значения межкластерных

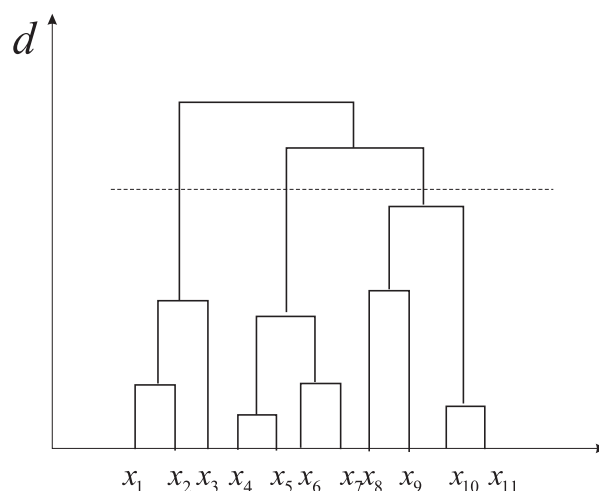


Рис. 29. Иерархическая кластеризация (пунктирная линия соответствует разбиению на три кластера)

расстояний  $d$  (рис. 29). Иерархические алгоритмы в подавляющем большинстве не зависят от порядка просмотра объектов. Построенное иерархическое дерево зависит от выбора расстояния, а число кластеров определяется уровнем на котором происходит "разрезание" дендрограммы на кластеры.

## Контрольные вопросы и задания

1. Постройте графически линейную дискриминантную функцию, удовлетворяющую принципу минимума расстояния для двух классов объектов  $A_1$  и  $A_2$ , эталонными элементами которых являются точки  $(2,3)$  и  $(-4,6)$ . Рассмотрите случай, когда первый класс характеризуется двумя эталонами  $(2,3)$  и  $(3,5)$ .

2. Пусть класс  $A_1$  отделяется от классов  $A_2$  и  $A_3$  линейной дискриминантной функцией вида  $d_1(x_1, x_2) = 5 - x_1$ , класс  $A_2$  от классов  $A_1$  и  $A_3$  функцией  $d_2(x_1, x_2) = 10 - x_1 + 2x_2$ , класс  $A_3$  от классов  $A_1$  и  $A_2$  функцией  $d_3(x_1, x_2) = -8 + x_1 + x_2$ . Графически изобразите области, относящиеся к каждому классу и области непринятия решения. Классифицируйте объекты  $(1,1)$ ;  $(6,7)$ ;  $(0,6)$ ;  $(5,-4)$ .

3. Для классификации объектов используются линейные дискрими-

нантные функции (I случай разделимости):

$$\begin{aligned}d_1(\vec{x}) &= 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 4 \\d_2(\vec{x}) &= 2x_1 + x_2 - 5 \\d_3(\vec{x}) &= 3x_1 - 4x_2 + x_3 - 6\end{aligned}$$

Классифицируйте объекты:

$$\vec{x}_1 = (1, 4, -2), \vec{x}_2 = (0, -1, 0), \vec{x}_3 = (4, 10, -3).$$

4. Для классификации объектов используются линейные дискриминантные функции (II случай разделимости):

$$\begin{aligned}d_{12}(\vec{x}) &= x_1 + x_2 + x_3 \\d_{13}(\vec{x}) &= -2x_1 + 4x_2 + x_3 - 1 \\d_{23}(\vec{x}) &= x_1 + 2x_2 - x_3 + 6\end{aligned}$$

Классифицируйте объекты:

$$\vec{x}_1 = (1, 1, 1), \vec{x}_2 = (-5, 0, 0), \vec{x}_3 = (0, -4, 3).$$

5. Для классификации объектов используются линейные дискриминантные функции (III случай разделимости):

$$\begin{aligned}d_1(\vec{x}) &= 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \\d_2(\vec{x}) &= -2x_1 + 4x_2 + x_3 \\d_3(\vec{x}) &= x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 + 1\end{aligned}$$

Классифицируйте объекты:

$$\vec{x}_1 = (1, 1, 1, 1), \vec{x}_2 = (-5, 0, 0, 2), \vec{x}_3 = (0, 0, -4, 3).$$

6. Пусть класс  $A_1$  представлен объектами  $(0,0)$  и  $(0,1)$ , а класс  $A_2$  объектами  $(1,0)$  и  $(1,1)$ . Используя алгоритм перцептрона обучения распознаванию, постройте линейную дискриминантную функцию  $d(x_1, x_2) = \omega_0 + \omega_1 x_1 + \omega_2 x_2$ . Первоначальный вектор весов задайте нулевыми значениями.

## Лекция 12. Статистический подход к задачам принятия решений

Статистический подход к распознаванию и классификации образов основан на том, что вероятности распределения значений признаков объектов могут быть различны для разных классов. Поэтому, зная априорные вероятности встречаемости классов объектов и вероятностные характеристики признаков объектов в этих классах, можно принять решение о принадлежности объекта к определенному классу с заданной надежностью.

### Байесовский классификатор

Основой статистических процедур классификации объектов является теорема Байеса о переоценке статистических гипотез. Пусть задана группа классов  $A_1, A_2, \dots, A_M$  и известны априорные вероятности классов  $P(A_i)$ . Если эти классы составляют полную группу гипотез, то:

$$\sum_{i=1}^M P(A_i) = 1.$$

Величины  $P(A_i)$  показывают, с какой вероятностью можно отнести объект к классу  $A_i$ , если признаки объекта неизвестны. Пусть в результате опыта (предъявления объекта для классификации) наблюдается событие: объект  $\vec{x}$  с измеренным (известным) набором значений признаков. Требуется классифицировать объект на основе вновь полученной информации, т.е. оценить  $P(A_i/\vec{x})$  – вероятность появления класса  $A_i$  при условии, что нам известны значения признаков предъявляемого объекта.

В общем случае считаются известными  $P(\vec{x}/A_i)$  – условные вероятности появления объекта с заданным набором параметров  $\vec{x}$ , если известно

к какому классу  $A_i$  он относится. Согласно теореме Байеса

$$P(A_i/\vec{x}) = \frac{P(A_i)P(\vec{x}/A_i)}{\sum_{i=1}^M P(A_i)P(\vec{x}/A_i)} = \frac{P(A_i)P(\vec{x}/A_i)}{P(\vec{x})}, \quad (186)$$

где  $P(\vec{x})$  – безусловная вероятность появления объекта с набором признаков  $\vec{x}$ . Очевидно, что  $\vec{x}$  следует отнести к тому классу, для которого апостериорная вероятность  $P(A_i/\vec{x})$  будет больше:

$$\vec{x} \in A_i, \text{ если } P(A_i/\vec{x}) > P(A_j/\vec{x}), \text{ для } \forall j \neq i. \quad (187)$$

Распознавание образов, в силу статистических свойств признаков, по своей сути является процедурой оценки статистических гипотез, и поэтому всегда существует вероятность принятия ложной гипотезы, т.е. отнесения объекта к такому классу, к которому он не относится в действительности. Ошибки классификации могут быть двух видов: **ошибки I рода** (пропуск цели), когда делается утверждение, что  $\vec{x} \notin A_i$ , хотя в действительности  $\vec{x} \in A_i$ ; **ошибки II рода** (ложная тревога), когда делается утверждение, что  $\vec{x} \in A_i$ , хотя в действительности  $\vec{x} \notin A_i$ . Цена ошибок первого и второго рода может быть существенно различной. Например, в задачах медицинской диагностики утверждения, что пациент здоров, хотя в действительности он болен (гиподиагностика) и пациент болен, хотя в действительности он здоров (гипердиагностика) имеют совершенно различную значимость.

При помощи статистического подхода становится возможным построить правило классификации, являющееся оптимальным в смысле наименьшей вероятности совершения ошибок классификации как первого, так и второго рода, т.е. правило, которое сводило бы к минимуму "потери" в результате неправильной классификации объектов. Другими словами требуется, чтобы на основе предложенного классификатора можно было бы оценивать потери или риск, связанный с неправильной классификацией объектов.

Допустим, что классификатор терпит убытки, если он принимает решение о том, что объект  $\vec{x}$  принадлежит к классу  $A_j$ , хотя в действительности он принадлежит к классу  $A_i$ . Обозначим величину убытков через  $L_{ij}$ , где первый индекс  $i$  характеризует истинную принадлежность объекта к классу, а второй индекс  $j$  – класс, к которому отнесен объект в результате применения правила классификации. Величина риска

неправильной классификации определяется исходя из конкретных условий задачи. Очевидно, что при распознавании объекта  $\vec{x}$  классификатор может отнести его к любому из возможных классов  $A_1, A_2, \dots, A_M$ . Величину потерь, связанных с неправильной классификацией объекта зададим **матрицей потерь**:

$$L = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & \dots & L_{1M} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} & \dots & L_{2M} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ L_{M1} & L_{M2} & L_{M3} & \dots & L_{MM} \end{pmatrix}. \quad (188)$$

Так как априорно неизвестно, к какому классу относится объект  $\vec{x}$ , то можно определить математическое ожидание потерь, связанных с отношением объекта к классу  $A_j$ :

$$r_j(\vec{x}) = \sum_{i=1}^M L_{ij} P(A_i / \vec{x}). \quad (189)$$

Функция  $r_j(\vec{x})$  называется **функцией условного среднего риска** или условных средних потерь, связанных с отношением объекта  $\vec{x}$  к классу  $A_j$ . Если вычислить средние потери, связанные с отношением  $\vec{x}$  к каждому из классов  $A_1, A_2, \dots, A_M$ , то минимальное значение  $r_j(\vec{x})$  определит класс, к которому следует отнести классифицируемый объект.

**Определение.** *Байесовским классификатором называется классификатор минимизирующий среднее ожидание потерь (риск), связанных с классификацией объекта:*

$$\vec{x} \in A_j, \text{ если } \min_j \{r_j(\vec{x})\}. \quad (190)$$

Подставим в формулу (189) выражение для  $P(A_i / \vec{x})$  из (186), тогда получим:

$$r_j(\vec{x}) = \frac{1}{P(\vec{x})} \sum_{i=1}^M L_{ij} P(\vec{x} / A_i) P(A_i). \quad (191)$$

Поскольку  $P(\vec{x})$  общий множитель для всех  $j$ , то его значение не скажется на качестве классификации и его можно не учитывать:

$$r_j(\vec{x}) = \sum_{i=1}^M L_{ij} P(\vec{x} / A_i) P(A_i). \quad (192)$$

Видно, что полученное выражение для байесовского классификатора определяется только априорными вероятностями классов  $P(A_i)$  и вероятностями распределения признаков в каждом из классов (функциями правдоподобия)  $P(\vec{x}/A_i)$ , т.е. величинами которые можно оценить из статистических исследований.

Получим выражение для байесовского классификатора в случае двух классов объектов,  $M = 2$ . Средние потери, связанные с отнесением объекта  $\vec{x}$  к каждому из классов равны:

$$\begin{aligned} r_1(\vec{x}) &= L_{11}P(\vec{x}/A_1)P(A_1) + L_{12}P(\vec{x}/A_2)P(A_2), \\ r_2(\vec{x}) &= L_{21}P(\vec{x}/A_1)P(A_1) + L_{22}P(\vec{x}/A_2)P(A_2). \end{aligned}$$

Допустим, что  $\vec{x} \in A_1$ , тогда должно выполняться неравенство  $r_1(\vec{x}) < r_2(\vec{x})$ :

$$(L_{21} - L_{22})P(\vec{x}/A_2)P(A_2) < (L_{12} - L_{11})P(\vec{x}/A_1)P(A_1). \quad (193)$$

Поскольку  $L_{ij} > L_{ii}$ , т.е. потери, связанные с неправильной классификацией, превышают потери, связанные с правильной классификацией, неравенство (193) можно преобразовать к виду:

$$\frac{P(\vec{x}/A_1)}{P(\vec{x}/A_2)} > \frac{P(A_2)(L_{21} - L_{22})}{P(A_1)(L_{12} - L_{11})}. \quad (194)$$

Выражение, стоящее в левой части неравенства (194) зависит от характеристик классифицируемого объекта и называется **отношением правдоподобия**:

$$l_{12}(\vec{x}) = \frac{P(\vec{x}/A_1)}{P(\vec{x}/A_2)}. \quad (195)$$

Оно показывает, во сколько раз априорная вероятность нахождения объекта со значениями признаков  $\vec{x}$  в классе  $A_1$ , превышает вероятность нахождения объекта с этими же значениями признаков в классе  $A_2$ .

Выражение в правой части неравенства (194) не зависит от характеристик классифицируемого объекта, а определяется только априорными вероятностями класса и ценой ошибок классификации. Оно носит название **порогового значения**:

$$\theta_{12} = \frac{P(A_2)(L_{21} - L_{22})}{P(A_1)(L_{12} - L_{11})}. \quad (196)$$



Таким образом, *байесовский классификатор для случая двух классов* объектов имеет вид:

$$\begin{cases} \vec{x} \in A_1, & \text{если } l_{12}(\vec{x}) > \theta_{12} \\ \vec{x} \in A_2, & \text{если } l_{12}(\vec{x}) < \theta_{12} \end{cases}. \quad (197)$$

В случае  $M$  классов задача распознавания решается аналогично: объект относится к тому классу, для которого средний риск неправильной классификации будет меньше:

$$\vec{x} \in A_i, \text{ если } r_i(\vec{x}) < r_j(\vec{x}), \text{ для } \forall j \neq i. \quad (198)$$

Или через отношения правдоподобия и пороговые значения:

$$\vec{x} \in A_i, \text{ если } l_{ij}(\vec{x}) > \theta_{ij}, \text{ для } \forall j \neq i, \quad (199)$$

где

$$l_{ij}(\vec{x}) = \frac{P(\vec{x}/A_i)}{P(\vec{x}/A_j)}, \quad \theta_{ij} = \frac{P(A_j)(L_{ji} - L_{jj})}{P(A_i)(L_{ij} - L_{ii})}. \quad (200)$$

Рассмотрим специальный случай *нормированных потерь*: будем полагать, что при принятии правильного решения потери классификации равны нулю, а в случае неправильного, вне зависимости от класса, потери одинаковы и равны единице  $L_{ij} = 1 - \delta_{ij}$ . В этом случае функции потерь будут иметь вид:

$$r_j(\vec{x}) = \sum_{i=1}^M (1 - \delta_{ij}) P(\vec{x}/A_i) P(A_i) = P(\vec{x}) - P(\vec{x}/A_i) P(A_i). \quad (201)$$

Условие классификации примет вид:

$$\vec{x} \in A_i, \text{ если } P(\vec{x}) - P(\vec{x}/A_i) P(A_i) < P(\vec{x}) - P(\vec{x}/A_j) P(A_j), \forall j \neq i. \quad (202)$$

Откуда следует

$$\vec{x} \in A_i, \text{ если } P(\vec{x}/A_i) P(A_i) > P(\vec{x}/A_j) P(A_j), \text{ для } \forall j \neq i. \quad (203)$$

Видно, что байесовский классификатор в случае нормированных потерь эквивалентен заданию дискриминантных функций, определяемых функциями правдоподобия  $d_i(\vec{x}) = P(\vec{x}/A_i) P(A_i)$  при обычном правиле распознавания:

$$\vec{x} \in A_i, \text{ если } d_i(\vec{x}) > d_j(\vec{x}), \text{ для } \forall j \neq i. \quad (204)$$

Иногда из соображений удобства рассматривают не сами дискриминантные функции, а их логарифмы:

$$d_i(\vec{x}) = \ln(P(\vec{x}/A_i)) + \ln(P(A_i)). \quad (205)$$

На качестве распознавания это не скажется, но во многих случаях упрощает расчеты, особенно при использовании нормального закона распределения признаков.

Обучение при статистическом подходе к решению задач распознавания заключается в нахождении вида закона распределения  $P(\vec{x}/A_i)$ , и априорных вероятностей классов  $P(A_i)$  по заданной обучающей выборке. Полученные значения оценок подставляются в дискриминантные функции и проводится оценка качества распознавания на верифицирующей выборке. Если качество распознавания на основе полученных дискриминантных функций не устраивает, то следует выяснить причину этого. Как правило, это либо неправильно выбранный закон распределения признаков, либо нерепрезентативная обучающая выборка.

## Байесовский классификатор в случае нормального закона распределения

Во многих задачах распознавания функции правдоподобия являются функциями плотности распределения гауссовского вида, т.е. признаки класса подчиняются нормальному закону распределения. Рассмотрим какой вид имеет правило классификации в этом важном случае.

**Одномерный случай.** Случайная величина  $x$ , описываемая нормальным законом распределения, характеризуется двумя параметрами: математическим ожиданием  $\mu$ , дисперсией  $\sigma^2$ . Функция распределения плотности вероятности имеет вид:

$$P(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right). \quad (206)$$

Рассмотрим построение байесовского классификатора на следующем примере. Пусть имеется признак  $x$ , встречающийся в двух различных классах  $A_1$  и  $A_2$ , характеризуется нормальным законом распределения. Математическое ожидание признака в классах составляет  $\mu_1 = 0$   $\mu_2 = 1$  соответственно, а дисперсия одинакова  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ . Априорная вероятность обнаружения объектов каждого из классов –  $P(A_1)$  и  $P(A_2)$ .

Матрицу потерь зададим в виде

$$L = \begin{pmatrix} 0 & L_{12} \\ L_{21} & 0 \end{pmatrix}, \quad (207)$$

т.е. будем считать, что при правильной классификации потери равны нулю, а при неправильной, оцениваются исходя из тяжести последствий неправильной классификации. В частности, если неверное отнесение объекта к классу  $A_2$  характеризуется более тяжелыми последствиями, чем к  $A_1$ , то  $L_{21} > L_{12}$ . При сделанных предположениях пороговое значение запишется в виде

$$\theta_{12} = \frac{L_{21}P(A_2)}{L_{12}P(A_1)}, \quad (208)$$

а отношение правдоподобия:

$$l_{12} = \frac{P(x/A_1)}{P(x/A_2)} = \exp\left(-\frac{1-2x}{2\sigma^2}\right). \quad (209)$$

Условие того, что объект с измеренным значением признака, равным  $x$ , относится к классу  $A_1$  будет определяться неравенством:

$$\exp\left(-\frac{1-2x}{2\sigma^2}\right) > \frac{L_{21}P(A_2)}{L_{12}P(A_1)} \quad (210)$$

или после несложных преобразований

$$x < \frac{1}{2} - \sigma^2 \ln\left(\frac{L_{21}P(A_2)}{L_{12}P(A_1)}\right). \quad (211)$$

Таким образом, решающее правило (дискриминантную функцию) можно записать следующим образом:

$$d(x) = \frac{1}{2} - x - \sigma^2 \ln\left(\frac{L_{21}P(A_2)}{L_{12}P(A_1)}\right). \quad (212)$$

Если признак не вероятностный  $\sigma^2 = 0$ , то правило распознавания соответствует результату следующему из геометрического подхода к распознаванию по принципу минимума расстояния, т.е. граница находится на середине расстояния между центрами классов:

$$d(x) = 0 = \frac{1}{2} - x, \quad \Leftrightarrow x = 0,5. \quad (213)$$

При учете вероятностных свойств, граница между классами будет смещена в зависимости от соотношения априорных вероятностей диагнозов и уровня потерь (рис. 30). В частности, при нормированных потерях

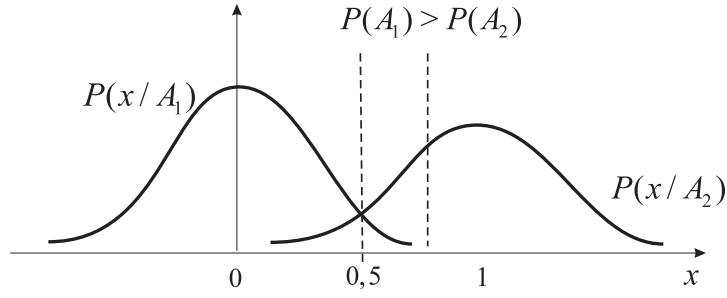


Рис. 30. Смещение границы между классами при учете вероятностных свойств

$L_{12} = L_{21} = 1$ , из (212) следует, что граница будет смещена в сторону класса  $A_1$ , если  $P(2) > P(1)$  и наоборот.

**Многомерный случай.** Пусть объекты класса характеризуются  $n$ -мерным набором признаков  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , в общем случае, взаимозависимых. Многомерная функция плотности вероятности нормального распределения для объектов  $i$ -го класса имеет вид:

$$P(\vec{x}/A_i) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |C_i|^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\vec{x} - \vec{\mu}_i)^T C_i^{-1}(\vec{x} - \vec{\mu}_i)\right), \quad (214)$$

где  $\vec{\mu}_i$  - вектор математических ожиданий признаков,  $C_i$  ковариационная матрица  $i$ -го класса.

Подставим в дискриминантную функцию, определенную выражением (205) функцию  $P(\vec{x}/A_i)$ . После несложных преобразований получим:

$$d_i(\vec{x}) = \ln(P(A_i)) - \frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \ln(|C_i^{-1}|) - \frac{1}{2}(\vec{x} - \vec{\mu}_i)^T C_i^{-1}(\vec{x} - \vec{\mu}_i).$$

Так как второе слагаемое одинаково в дискриминантных функциях всех классов, то его величина не скажется на качестве распознавания. Поэтому окончательно байесовский классификатор для объектов, характеризующихся многомерным нормальным законом распределения, будет следующим:

$$d_i(\vec{x}) = \ln(P(A_i)) - \frac{1}{2} \ln(|C_i^{-1}|) - \frac{1}{2}(\vec{x} - \vec{\mu}_i)^T C_i^{-1}(\vec{x} - \vec{\mu}_i). \quad (215)$$

Видно, что разделяющие поверхности в пространстве признаков представляют собой поверхности второго порядка и не выше. Величину

$$(\vec{x} - \vec{\mu}_i)^T C_i^{-1}(\vec{x} - \vec{\mu}_i), \quad (216)$$

входящую в формулу (215), по аналогии с евклидовым расстоянием, называют **расстоянием Махаланобиса**. Если признаки независимы

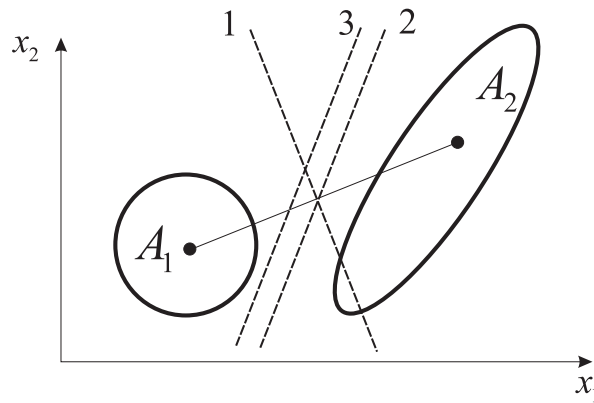


Рис. 31. Граница между классами при использовании расстояния Махаланобиса

$C = I$ , где  $I$  - единичная матрица, то расстояние Махаланобиса совпадает с евклидовым расстоянием, а многомерная функция плотности распределения будет равна произведению соответствующих одномерных функций плотности распределения.

В случае взаимозависимых признаков, дискриминантные функции, построенные с использованием расстояния Махаланобиса позволяют более качественно решить задачу распознавания (рис. 31). Взаимозависимость признаков приводит к тому, что область, занимаемая классом, имеет форму эллипса, направление осей которого будет не совпадать с координатными осями, как в случае независимых признаков. Поэтому построение границы между классами по принципу минимума евклидова расстояния (прямая 1) может приводить к неправильной классификации. Классификатор, построенный с учетом требования минимума расстояния Махаланобиса (прямая 2), более корректно позволяет решать задачи распознавания. Если априорные вероятности классов  $P(A_1)$  и  $P(A_2)$  различны, то разделяющая граница будет смещена в сторону класса с меньшей априорной вероятностью. В частности, прямая 3 соответствует случаю  $P(A_1) < P(A_2)$ .

## Последовательный анализ Вальда в задачах медицинской диагностики

С точки зрения медицинской кибернетики процесс установления диагноза представляет собой процесс распознавания образа или классификации. Больному (объект  $\vec{x}$ ), характеризующемуся набором симптомов (признаков  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ), требуется поставить диагноз (отнести объект

к одному из известных классов  $A_i, i = \overline{1, M}$ ). Формализация задачи медицинской диагностики начинается, как правило, с оценки частоты встречаемости диагнозов и установления вероятностных характеристик комплексов симптомов при различных заболеваниях. Это требует проведения предварительных статистических исследований по решаемой проблеме. В целом необходимо знать.

- Частоту встречаемости заболевания (априорную вероятность  $i$ -го диагноза):

$$P(A_i) = \frac{N(A_i)}{\sum_{i=1}^M N(A_i)},$$

где  $N(A_i)$  – количество случаев постановки  $i$ -го диагноза.

- Условную частоту встречаемости комплекса симптомов  $\vec{x}$  при  $i$ -м диагнозе:

$$P(\vec{x}/A_i) = \frac{N(\vec{x}/A_i)}{\sum_{i=1}^M N(A_i)},$$

где  $N(\vec{x}/A_i)$  – количество случаев, в которых встречался комплекс симптомов  $\vec{x}$  при постановке  $i$ -го диагноза.

- Безусловную частоту встречаемости комплекса симптомов  $\vec{x}$ :

$$P(\vec{x}) = \frac{N(\vec{x})}{\sum_{i=1}^M N(A_i)},$$

где  $N(\vec{x})$  – общее число случаев, в которых встречался комплекс симптомов, вне зависимости от вида диагноза.

Все перечисленные вероятностные характеристики являются априорными, т.е. их можно оценить до построения правила классификации, на основе статистических данных учреждений здравоохранения.

Идея **последовательного анализа Вальда** в диагностических алгоритмах основана на предположении, что путем последовательного накопления и оценки информации, содержащейся в измеряемых показателях, можно на каком-либо шаге вынести диагностическое решение с заранее определенным уровнем надежности.

Рассмотрим случай двух диагнозов  $A_1$  и  $A_2$ . Функции правдоподобия  $P(x_1/A_1)$  и  $P(x_1/A_2)$  определяют вероятность наличия признака  $x_1$  при данных диагнозах. Отношение правдоподобия

$$l_{12}(x_1) = \frac{P(x_1/A_1)}{P(x_1/A_2)}$$

будет показывать вероятность превышения одного диагноза над другим у пациента при измеренном значении признака  $x_1$ . Если указанное отношение будет превышать заданное пороговое значение  $l_{12} > A$ , то можно принять решение о постановке пациенту диагноза  $A_1$ . И, наоборот, если отношение правдоподобия будет меньше некоторого наперед заданного порога  $l_{12} < B$ , то принимается решение о постановке диагноза  $A_2$ . В случае, когда заданные пороги не достигнуты  $B \leq l_{12} \leq A$ , требуется дополнительное исследование. Оно заключается в привлечении дополнительного признака  $x_2$  для уточнения диагноза. Отношение правдоподобия, при совместном учете признаков  $x_1$  и  $x_2$  будет иметь вид:

$$l_{12}(x_1, x_2) = \frac{P(x_1, x_2/A_1)}{P(x_1, x_2/A_2)}. \quad (217)$$

Если в этом случае будет превышен какой-либо из диагностических порогов  $A$  или  $B$ , то ставится соответствующий диагноз, в противном случае для принятия решения привлекается следующий диагностический признак  $x_3$  и т.д.

Пороговые значения для постановки диагноза определяются через вероятности ошибок первого и второго рода:

$$A = \frac{1 - \alpha}{\beta}, \quad B = \frac{\alpha}{1 - \beta}, \quad (218)$$

где  $\alpha$  – вероятность ошибки первого рода (доля больных с диагнозом  $A_1$ , у которых ошибочно поставлен диагноз  $A_2$ ),  $\beta$  – вероятность ошибки второго рода (доля больных с диагнозом  $A_2$ , у которых ошибочно поставлен диагноз  $A_1$ ).

В случае независимых признаков отношение правдоподобия будет равно произведению отношений правдоподобия для отдельных признаков. Процедура принятия решения на основании анализа  $k$  независимых признаков заключается в следующем:

$$\text{если } \prod_{i=1}^k \frac{P(x_i/A_1)}{P(x_i/A_2)} > \frac{1 - \alpha}{\beta}, \quad \text{то ставится диагноз } A_1;$$

если  $\prod_{i=1}^k \frac{P(x_i/A_1)}{P(x_i/A_2)} < \frac{\alpha}{1-\beta}$ , то ставится диагноз  $A_2$ ;

если  $\frac{\alpha}{1-\beta} \leq \prod_{i=1}^k \frac{P(x_i/A_1)}{P(x_i/A_2)} \leq \frac{1-\alpha}{\beta}$ , то требуется

привлечение дополнительного признака  $x_{k+1}$  для уточнения диагноза.

На практике процедуру расчетов можно существенно упростить, если ввести понятие диагностического коэффициента.

**Определение.** *Диагностическим коэффициентом признака  $x$ , при постановке диагнозов  $A_1$  и  $A_2$  называется логарифм отношения правдоподобия:*

$$DK_x = 10^q \ln \left( \frac{P(x/A_1)}{P(x/A_2)} \right). \quad (219)$$

Множитель  $10^q$  вводится из требования, чтобы диагностический коэффициент представлял собой целое число.

Диагностические пороги в этом случае также выражаются в виде логарифмов:

$$A = 10^q \ln \left( \frac{1-\alpha}{\beta} \right), \quad B = 10^q \ln \left( \frac{\alpha}{1-\beta} \right).$$

Процедура принятия решения сводится к суммированию диагностических коэффициентов признаков, которые выражаются целыми числами и оценке следующего неравенства:

$$B \leq \sum_{i=1}^k DK(x_i) \leq A. \quad (220)$$

При достижении суммой диагностических коэффициентов одной из границ неравенства, принимается решение о постановке диагноза. В противном случае процедура уточнения диагноза продолжается с привлечением дополнительных признаков.

В последовательном анализе Вальда эффективность постановки диагноза существенно зависит от взаимозависимости признаков. Чем больше один признак зависит от другого, тем меньше его ценность для принятия решения. Кроме того, важна и последовательность использования признаков: целесообразно использовать признаки в порядке убывания их



информативности, т.к. при этом скорость достижения одного из диагностических порогов будет максимальной, а ошибки диагностики минимальны.

Такой формализованный поход к постановке диагноза лишен многих недостатков свойственных врачу, связанных с утомлением, эмоциональным настроением и т.п. Однако следует учитывать, что при этом исключается использование интуиции, врачебного опыта, диагностика производится по заранее составленной жесткой схеме, которая не может отобразить все разнообразие реальных ситуаций. Тем не менее, для решения задач медицинской диагностики, особенно с использованием информационных технологий, последовательный анализ Вальда применяется достаточно широко.

## Оценка информативности признаков

Оценка информативности признаков в процедуре последовательного анализа Вальда имеет важное значение. Интуитивно ясно, что признак обладает большей информативностью, если он позволяет производить правильное распознавание состояния с большей вероятностью. Поэтому учет диагностической ценности признаков и их количественное выражение позволяет строить оптимальный план принятия решения, минимизирующий число дополнительных анализов и исследований. Особенно важно уметь оценивать информативность признаков, если подобные обследования являются дорогими, сложными или небезопасными для обследуемого. С другой стороны, отбор наиболее информативных признаков позволяет снизить размерность пространства признаков, что существенно снижает вычислительные затраты на решение задачи классификации. Рассмотрим два основных подхода к оценке информативности признаков.

**Геометрический подход.** Пусть задана некоторая система диагнозов  $A = \{A_1, A_2\}$ , представляющая два класса объектов, описываемых признаками  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . В качестве количественной меры информативности  $I_A(x_i)$  признака  $x_i$  для принятия решения, можно рассматривать разность расстояний между классами, определенных с учетом и без учета данного признака:

$$I_A(x_i) = d(A_1, A_2) - d_{x_i}(A_1, A_2). \quad (221)$$

Если признак малоинформативен, то он не будет сильно изменять расстояние между классами. Таким образом, алгоритм отбора информативных признаков (снижение размерности пространства признаков) может быть описан следующим образом: наименее информативный признак находится из условия  $\min_i I_A(x_i)$  и исключается. Процедура повторяется для оставшихся признаков до тех пор, пока не получим желаемую размерность пространства признаков или не упорядочим их по информативности.

**Статистический подход.** Для оценки информативности признаков при статистическом оценивании используется понятие энтропии. Пусть имеется система диагнозов  $A = \{A_1, A_2, \dots, A_M\}$ . Априорно, по данным обработки статистического материала, медицинской литературы и т.п., оценена вероятность постановки диагноза  $P(A_i)$ . Причем диагнозы образуют полную группу, т.е.

$$\sum_{i=1}^M P(A_i) = 1.$$

Определим энтропию системы диагнозов согласно (8):

$$H(A) = - \sum_{i=1}^M P(A_i) \log_2 P(A_i). \quad (222)$$

Если измеряемые признаки являются информативными для постановки диагноза, то энтропия системы диагнозов будет уменьшаться по мере проведения обследования. Пусть у пациента измерено значение признака  $x_i$ . Количество информации, вносимое в систему диагнозов обследованием по данному показателю, можно оценить как разность энтропий  $H(A)$  и  $H(A/x_i)$  системы диагнозов  $A$  до и после измерения  $x_i$ :

$$I_A(x_i) = H(A) - H(A/x_i) \quad (223)$$

и рассматривать его как меру информативности признака  $x_i$ .

Из свойств количества информации известно, что  $I_A(\vec{x}) \leq H(A)$ . Отсюда следует важное методологическое следствие: объем информации вносимый диагностическим процессом в постановку диагноза не может быть больше первоначального количества информации, содержащегося в системе диагнозов. Другими словами, проведение сколь угодно большого

числа дополнительных обследований может и не давать новой информации, с точки зрения уточнения диагноза.

В процессе диагностики важно уметь количественно оценивать вклад измеренного признака  $x_j$  в постановку отдельного диагноза  $A_i$ . Это позволяет сделать величина, называемая диагностическим весом признака.

**Определение.** *Диагностическим весом признака  $x_j$  при постановке диагноза  $A_i$  называется величина*

$$I_{A_i}(x_j) = \log_2 \left( \frac{P(x_j/A_i)}{P(x_j)} \right), \quad (224)$$

где  $P(x_j/A_i)$  – условная вероятность встречаемости признака  $x_j$  при постановке диагноза  $A_i$ , а  $P(x_j)$  – безусловная вероятность встречаемости признака  $x_j$  во всей системе диагнозов.

Видно, что если распределение вероятностей признака  $x_j$  при диагнозе  $A_i$  совпадает с распределением вероятностей этого признака в среднем по всей группе диагнозов  $P(x_j/A_i) = P(x_j)$ , то диагностический вес такого признака будет равен нулю.

Можно определить **средний диагностический вес признака  $x_j$**  по отношению ко всей системе диагнозов  $A$  следующим образом:

$$I_A(x_j) = \sum_{i=1}^M P(A_i) I_{A_i}(x_j) = \sum_{i=1}^M P(A_i) \log_2 \left( \frac{P(x_j/A_i)}{P(x_j)} \right). \quad (225)$$

Применение этой формулы также позволяет упорядочить по информативности признаки, используемые при статистическом подходе к оценке информативности и выбрать наиболее оптимальную схему обследования пациента.

В медицинских исследованиях широко используется мера количественной оценки информативности признаков предложенная Кульбаком. **Информационная мера Кульбака** определяется следующим образом:

$$I_K(x_i) = \sum_{j=1}^m 10^q \lg \left( \frac{P(x_{ij}/A_1)}{P(x_{ij}/A_2)} \right) \frac{1}{2} |P(x_{ij}/A_1) - P(x_{ij}/A_2)|. \quad (226)$$

Величина  $I_K(x_i)$  позволяет количественно оценить информативность  $i$ -го признака при постановке диагнозов  $A_1$  и  $A_2$ . Множитель  $10^q$  введен для перехода к целым числам.

При ее построении учтены два момента.

- Поскольку разные значения одного и того признака могут иметь различное диагностическое значение, множество значений каждого признака разбито на интервалы  $x_{ij}$  ( $j$ -й диапазон  $i$ -го признака) и оценивается вклад каждого диапазона в отдельности в величину информативности.
- Учитывается мера расхождения распределений  $j$ -го диапазона  $i$ -го признака для различных диагнозов. Действительно, диагностическая ценность значения признака  $x_i$ , определяется частотой встречаемости его в различных диагнозах. Например, если признак  $x_i$  в  $j$ -м диапазоне встречается, в одном случае, с частотой 0,5 при диагнозе  $A_1$ , и с частотой 0,1 при диагнозе  $A_2$ , а в другом – с частотами 0,05 и 0,01, соответственно, то диагностические коэффициенты признака  $x_{ij}$  будут одинаковы, хотя с точки зрения постановки диагноза, первый случай будет более информативен, т.к. признак встречается в десять раз чаще при измерениях. Множитель вида

$$\frac{1}{2}|P(x_{ij}/A_1) - P(x_{ij}/A_2)|$$

в формуле (226) и позволяет учесть меру расхождения распределений при различных диагнозах.

В случае нормального закона распределения признаков информационная мера Кульбака может быть выражена через параметры распределения признака  $x_i$  для первого и второго диагнозов  $(\mu_1, \sigma_1)$  и  $(\mu_2, \sigma_2)$  следующим образом:

$$I_K(x_i) = \left[ W_i^2 + \frac{1}{W_i^2} - 2 + \left( 1 + \frac{1}{W_i^2} \right) Z_i^2 \right] 2,5 \lg(e), \quad (227)$$

где

$$W_i = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}, \quad Z_i = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\sigma_2}.$$

Информационную меру Кульбака можно использовать, если в эмпирических данных отсутствуют нулевые частоты во всех диапазонах изменения признака. В противном случае соответствующий диагностический коэффициент будет обращаться в бесконечность:

$$DK(x_{ij}) = \pm\infty, \text{ если } P(x_{ij}/A_l) = 0.$$

Для использования меры Кульбака в этих случаях разработаны различные приемы устранения нулевых частот. Перечислим некоторые из них.

- Частота встречаемости значения признака в каждом из  $k$  диапазонов увеличивается на 1:

$$P(x_{ij}/A_l) = \frac{N(x_{ij}/A_l)_1}{\sum_{j=1}^k N(x_{ij}/A_l) + k} \neq 0.$$

В этом случае основные свойства распределения сохраняются. Если же подряд несколько диапазонов признака содержат нулевые частоты, то это может привести к существенным искажениям оценки информативности.

- Метод укрупнения диапазонов. В этом случае нулевые частоты исчезают за счет объединения диапазонов с нулевыми и ненулевыми частотами. Однако при таком подходе происходит занижение оценки информативности признака для постановки диагноза за счет объединения мало- и высокоинформативных диапазонов.
- Использование методов сглаживания эмпирических частот. Например, в методе скользящей средней значение частоты в некотором диапазоне заменяется взвешенным средним по ряду соседних диапазонов. Следует помнить, что в сглаженном ряде частот происходит сужение числа интервалов изменения признака, что так же может приводить к снижению информативности признака.
- Аппроксимация эмпирических частот теоретическими распределениями, например нормальным распределением.

## Лекция 13. Другие процедуры принятия решений

Рассмотренные выше методы распознавания, использующие геометрические и статистические понятия для решения задач классификации, широко применяются для решения биомедицинских задач распознавания. Однако в настоящее время появляется большое количество методов распознавания образов, объединяющих как эти подходы, так и привлекающие другие математические и эвристические методы. Рассмотрим общие идеи некоторых из них.

### Методы потенциальных функций

Для классификации объектов при статистическом подходе к распознаванию требуется знать функции правдоподобия  $P(\vec{x}/A_i)$ , т. е. функции плотности вероятности распределения признаков  $\vec{x}$ , при условии, что объект принадлежит классу  $A_i$ . В методе потенциальных функций их вместо них используют некоторые функции известного вида (потенциальные функции), не требующие знания статистических свойств признаков классов.

Терминология пришла из теории электричества. Если с каждым объектом сопоставить некоторый заряд  $q$ , то он будет создавать в пространстве вокруг себя электрическое поле с потенциалом  $F = kq/R$ , где  $R$  – расстояние до объекта,  $k$  – коэффициент пропорциональности. Величина потенциала максимальна в точке, соответствующей объекту, и убывает по мере удаления от него. Если объектов несколько, то суперпозиция их потенциалов будет создавать в пространстве некоторую потенциальную поверхность.

Пусть объекты характеризуются одним признаком  $x$ . Сопоставим эталонам одного класса  $x^{(1)}, x^{(2)}$  потенциальные функции, соответствующие положительному заряду, а эталонам другого класса  $x^{(3)}, x^{(4)}$  – отрица-

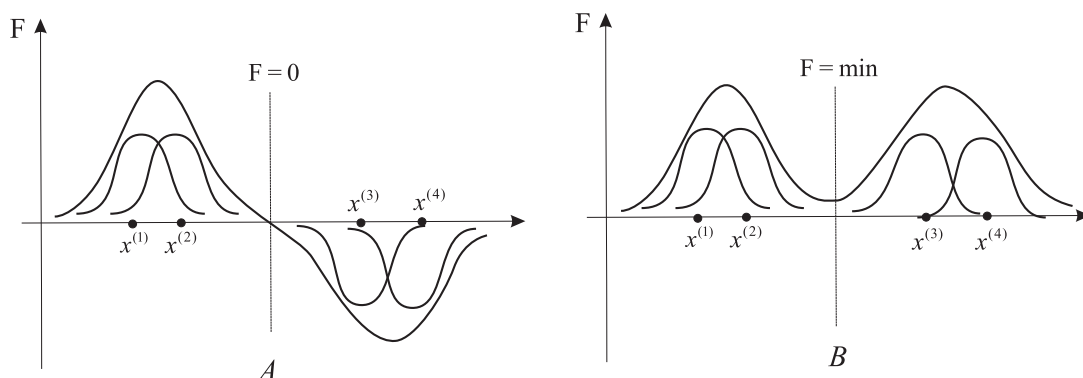


Рис. 32. Потенциальная функция для случая двух классов

тельному. Каждый из зарядов создает некоторый потенциал (рис. 32-А). Равенство нулю суммарного потенциала всех эталонных объектов будет определять разделяющую границу между классами. Иногда с объектами обоих классов сопоставляются потенциальные функции одного знака (рис. 32-В). В этом случае граница между классами будет определяться минимумом потенциала. В многомерном случае рассматриваются аналогичные потенциальные поверхности.

В качестве потенциальных функций выбирают различные симметричные функции, удовлетворяющие свойствам потенциала: максимум в точке, соответствующей объекту и симметричное убывание по мере удаления с объекта. Например, ими могут быть различные функции, построенные с использованием расстояния:

$$F(x, x^{(k)}) = Ae^{-Bd^2(x, x^{(k)})},$$

$$F(x, x^{(k)}) = \frac{A}{1 + Bd^2(x, x^{(k)})},$$

либо наборы ортонормированных функций специального вида:

$$F(x, x^{(k)}) = \sum_{j=1}^m \varphi_j(x)\varphi_j(x^{(k)}), \quad (228)$$

где  $\varphi_i(x)$  - ортонормированный набор функций специального вида, например полиномиальные функции Эрмита, Лежандра, Лагерра и т.п.

Процедура обучения распознаванию заключается в подборе вида потенциальной поверхности таким образом, чтобы классификация вновь предъявляемых объектов проводилась с минимальным количеством ошибок распознавания.

## Методы теории формальных языков

Первоначально эти методы разрабатывались для перевода текстов с использованием ЭВМ, но в дальнейшем оказалось, что теория формальных языков (моделирующая естественные языки) имеет гораздо более широкое применение, особенно в приложении к решению задач классификации и распознавания образов. Основное отличие методов теории формальных языков или, как их еще называют, синтаксических (лингвистических, структурных) методов распознавания образов, от ранее рассмотренных заключается в непосредственном учете структуры образов в процессе построения правила распознавания, т.е. учете вида образующих объекты элементов и взаимосвязей между ними.

Основными понятиями теории формальных языков являются:

**Алфавит** – любое конечное множество символов  $V$ .

**Предложение** – произвольная цепочка символов конечной длины  $S$ , состоящая из символов алфавита. Предложение, не содержащее ни одного символа, называется пустым предложением  $S_0$ .

**Язык** – произвольное множество предложений составленных из символов алфавита  $V$ .

**Грамматика** – объединение множеств:  $G = V_N, V_T, P, S$ ,

где  $V_N$  – множество нетерминальных символов (переменных);

$V_T$  – множество терминальных символов (констант);

$P$  – множество грамматических правил (правила подстановки);

$S$  – начальный (корневой) символ.

Например, в обычном языке:  $S$  – само предложение;  $V_T$  – понятия "существительное", "глагол", "наречие" и т.п.;  $V_N$  – все конкретные слова языка;  $P$  – множество грамматических правил.

$L(G)$  – **язык, порождаемый грамматикой  $G$**  – множество предложений (цепочек), удовлетворяющих условиям:

- 1) каждое предложение составлено только из терминальных символов;
- 2) каждое из предложений может быть выведено из  $S$  путем применения правил грамматики.



Вывод любого предложения начинается с начального символа  $S$ . Правила подстановки определяют разрешенные способы замены исходного символа на цепочку символов, содержащих как терминальные, так и нетерминальные символы. Предложение считается построенным, если оно содержит только терминальные символы.

Если с каждым классом объектов сопоставить некоторую грамматику, то любой объект класса можно рассматривать как предложение, составленное по правилам данной грамматики. Задача распознавания образов будет заключаться в том, чтобы определить, является ли вновь предъявляемый объект, описанный с помощью алфавита  $V$ , терминальным (конечным) предложением какой-либо грамматики, т. е. относится ли он классу объектов, для которых эта грамматика построена или нет. Такая процедура называется грамматическим разбором предложения и используется для решения задач распознавания. Грамматический разбор предложения может осуществляться двумя путями:

- "сверху-вниз" – берется корневой символ  $S$  и посредством правил грамматики пытаются получить заданное предложение;
- "снизу-вверх" – берется предложение, описанное в алфавите грамматики и производится анализ, соответствует ли оно правилам грамматики.

Рассмотрим пример грамматики для распознавания символьных образов. Обозначим большими буквами нетерминальные, а малыми терминальные символы грамматики.

$V_T : \{a(\rightarrow), b(\uparrow), (\sphericalangle)\}$  – терминальные символы, характеризующие направленные отрезки;

$V_N : \{S, A, B, C, D\}$  – нетерминальные символы;

$P : \{S \Rightarrow abC, S \Rightarrow aSBC, CB \Rightarrow CD, CD \Rightarrow BD, BD \Rightarrow BC, bB \Rightarrow bb, C \Rightarrow c\}$  – правила подстановки;

Построим некоторые предложения в соответствии с правилами данной грамматики.

1.  $S \Rightarrow abC \Rightarrow abc$  – терминальное предложение;
2.  $S \Rightarrow aSBC \Rightarrow aabCBC \Rightarrow aabCDC \Rightarrow aabBDC \Rightarrow aabBCC \Rightarrow aabbCC \Rightarrow aabbcc$  – терминальное предложение.

На рисунке 33 приведены образы соответствующие данным предложениям. Видно, что они представляют собой прямоугольные треугольники со сторонами пропорциональными исходным отрезкам. Таким образом,

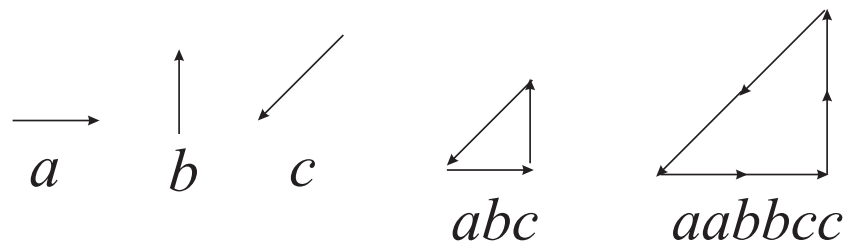


Рис. 33. Образы, описывание грамматикой

язык, порожденный данной грамматикой, является описанием класса прямоугольных треугольников, каждому из которых можно сопоставить предложение вида:  $\{a^n b^n c^n | n \geq 1\}$ .

## Методы коллективов решающих правил

Различные методы распознавания могут приводить к различным результатам на одних и тех же наборах признаков. Поэтому возникает желание разработать правило, которое учитывало бы сильные стороны каждого из используемых алгоритмов распознавания, а вывод делался бы на основе некоторого синтетического решающего правила (алгоритма). Т.е. должна применяться двухуровневая схема распознавания. На первом уровне работают частные алгоритмы распознавания, а на втором по полученным результатам строится блок синтеза. Такой подход носит название метод **коллективов решающих правил**. Для каждого решающего правила выделяется область компетентности, т.е. выделяется то подмножество пространства признаков, в котором данное правило работает лучше всего. Такое разбиение пространства признаков производится, исходя из экспертных оценок предметной области специалистами, расслоения выборки объектов по какому-либо признаку, на основе формальных соотношений и т.п. Для каждой из полученных областей выбирается наиболее оптимальный алгоритм распознавания.

Блок синтеза рассматривает результаты, полученные частными алгоритмами, как исходные признаки для построения нового обобщенного решающего правила. Например, это может быть голосование – предпочтение отдается тому выводу, который получен в большинстве используемых алгоритмов распознавания.

На практике применение методов коллективов решающих правил требует большого объема вычислений, широкого привлечения экспертных

знаний, поэтому в них, наряду с формализованными математическими подходами, широко используются эвристические ограничения и допущения.

## Нейронные сети

В последнее время для решения задач распознавания стали широко применяться искусственные нейронные сети, в основу работы которых заложены принципы имитации процессов распознавания, реализуемых головным мозгом человека. Нейронная сеть состоит из множества относительно простых, в многих случаях однотипных элементов, имитирующие работу нейронов мозга. Основной ячейкой сети является искусственный нейрон (рис. 34). Каждый нейрон характеризуется своим текущим состоянием, по аналогии с нервными клетками головного мозга, которые могут находиться в возбужденном состоянии или в покое. Нейрон обладает группой синапсов – однонаправленных входных связей, соединенных с выходами других нейронов, а также имеет аксон – выходную связь данного нейрона, с которой сигнал (возбуждения или торможения) поступает на синапсы следующих нейронов. Каждый синапс может быть охарактеризован величиной синаптической связи или ее весом  $w_i$ , который по физическому смыслу эквивалентен электрической проводимости. Состояние нейрона в любой момент времени определяется, как взвешенная сумма его входов:

$$S = \sum_{i=1}^n w_i x_i. \quad (229)$$

Величина выхода нейрона  $Y$ , является функцией его состояния  $Y = f(S)$  и называется **активационной функцией**. В зависимости от вида активационной функции, весовых коэффициентов, нейронная сеть может быть настроена на распознавание различных классов объектов.

Соединенные определенным образом, нейроны образуют **нейронную сеть**. В зависимости от способов соединения нейронов выделяют однослойные и многослойные сети. Число слоев и число нейронов в каждом слое может быть произвольным, однако фактически оно ограничено ресурсами компьютера или специализированной микросхемы, на которых обычно реализуется нейронная сеть.

Примером однослойной нейронной сети является перцептрон, подробно рассмотренный ранее. Если каждый нейрон произвольного слоя связан

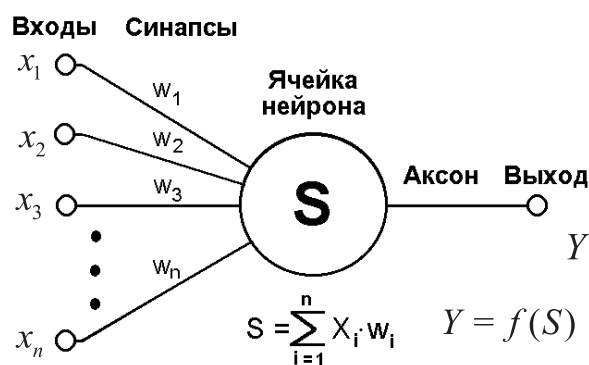


Рис. 34. Искусственный нейрон

со всеми аксонами нейронов предыдущего слоя или, в случае первого слоя, со всеми входами сети, то такая сеть называется **полносвязной нейронной сетью**. Когда нейронная сеть представлена одним слоем нейронов, то алгоритм ее обучения достаточно очевиден, т.к. правильные выходные состояния нейронов заведомо известны, и подстройка синаптических связей идет из требования минимизации ошибки на выходе сети. В многослойных сетях оптимальные выходные значения нейронов всех внутренних слоев сети практически невозможно определить, поэтому процедуры обучения распознаванию таких сетей основаны на специальных алгоритмах, требующих больших вычислительных затрат.

Выбор структуры нейронной сети (синтез) зависит от сложности и особенностей решаемой задачи и задается числом нейронов сети, плотностью связей между ними, количеством выделенных слоев. Обучение нейронной сети заключается в оптимальном подборе весовых коэффициентов и может осуществляться как "с учителем" так и "без учителя". В первом случае нейронной сети предъявляются значения как входных, так и желательных выходных сигналов и она по заданному алгоритму подстраивает веса своих синаптических связей. Во втором случае выходные сигналы сети формируются самостоятельно на основе только предъявляемых входных сигналов.

# Лекция 14. Принципы распознавания зрительных образов

Одним из основных направлений применения теории распознавания образов в биомедицинских приложениях является автоматизированный анализ и хранение изображений с использованием ЭВМ. Спектр задач здесь очень широк: от автоматизированного подсчета клеток, хромосом до анализа изображений в компьютерной томографии. Целью анализа зрительного изображения является обнаружение определенного события или классификация объекта, представленного на рентгеновском снимке, экране монитора, фотографии и т.п. Главная проблема анализа изображений заключается в том, что исходный зрительный образ представлен десятками и сотнями тысяч бит информации. Для эффективной работы алгоритмов распознавания требуется преобразовать его в описание, представленное максимум несколькими десятками бит, причем сохранить при этом основу для качественного распознавания. Таким образом, прежде чем решать задачу распознавания требуется рассмотреть задачи, связанные с представлением зрительной информации в форме пригодной для хранения в ЭВМ и с обработкой изображений: подавлением несущественных деталей, сглаживанием дефектов изображения, выделением контура объекта и т.п.

## Представление зрительной информации

Будем рассматривать черно-белое изображение, лежащее в плоскости  $XU$ , как вещественную функцию двух переменных  $g(x, y)$ .

**Определение.** *Функцией интенсивности изображения  $g(x, y)$  называется величина пропорциональная интенсивности света, отраженного от плоскости изображения в точке  $(x, y)$  (яркости изображения).*

Удобно, чтобы диапазон изменения значений функции интенсивно-

сти был нормирован на единичный интервал:  $g(x, y) = 0$  для черного цвета, и  $g(x, y) = 1$  для белого, (либо наоборот, из соображений удобства представления зрительного объекта). Для всех остальных оттенков  $0 < g(x, y) < 1$ .

Функцию интенсивности задать в аналитическом виде можно только для достаточно простых видов изображений. Хранение же любой информации в ЭВМ, в том числе и зрительного образа, возможно лишь в цифровой форме. Поэтому для хранения и обработки изображения функцию интенсивности задают путем измерения ее значений в достаточно большом числе точек плоскости  $XU$  и их запоминания в виде файла числовых данных. Этот процесс носит название взятия отсчетов или **квантования изображения**. Самый простой способ квантования – разбить плоскость изображения с помощью сетки на ячейки и измерять яркость изображения в центрах ячеек (или интегральную яркость в пределах ячейки).

Функция интенсивности принимает значения в диапазоне от черного до белого цвета, поэтому требуется разбивать качественный диапазон интенсивностей на ряд градаций. После чего исходное изображение (его функция интенсивности) может быть представлено массивом чисел. Как разбивать на градации? Наиболее простой способ заключается в том, что диапазон изменения интенсивности изображения разбивается на одинаковые интервалы. Их количество определяется требованиями сохранения подробности изображения и разумным объемом получаемого массива чисел. Однако, иногда ступени квантования выбирают и неравномерными. Например, если большинство существенных деталей лежит в темной области, то темный интервал можно разбить на более мелкие ступени, а светлые на более крупные. Другой подход к выбору ступеней квантования основан на следующем факте из физиологии устройства зрительной системы: реакция зрительной системы пропорциональна интенсивности, т.е. экспоненциальное изменение яркости зрительного стимула воспринимается как в равной степени заметное на глаз. Другими словами равномерно квантуется величина  $\log_a g(x, y)$ .

Выбор вида сетки для квантования изображения также может быть различным (рис. 35). Наиболее простая – квадратная сетка. В этом случае изображение будет описываться двумерной числовой матрицей  $g(i, j)$ , элементы которой соответствуют интенсивности изображения в ячейках сетки  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца. При использовании квадратной сетки со-

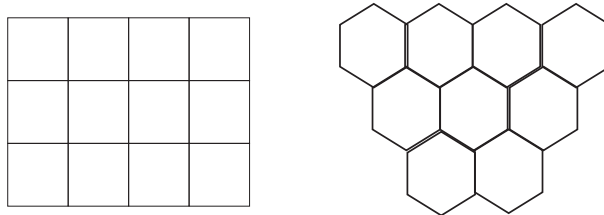


Рис. 35. Виды сеток для квантования изображения

седние ячейки, например, могут и не иметь общей стороны, что несколько усложняет алгоритм обнаружения и анализа соседних ячеек сетки. Если в качестве сетки выбрать сотовую структуру, то соседними будут считаться любые ячейки, имеющие общую сторону.

Рассмотрим способ представления изображения, заключающийся в использовании только двух градаций интенсивности: черной и белой. **Бинарным изображением** называется изображение, функция интенсивности которого имеет вид:

$$g(i, j) = \begin{cases} 1 & \text{если } (i, j) \text{ - элемент объекта,} \\ 0 & \text{если } (i, j) \text{ - элемент фона.} \end{cases} \quad (230)$$

Получить бинарное изображение можно, задавая порог  $\rho_0$ , для функции интенсивности реального изображения:

$$\begin{aligned} g(i, j) > \rho_0 &\Rightarrow g(i, j) = 1, \\ g(i, j) \leq \rho_0 &\Rightarrow g(i, j) = 0. \end{aligned}$$

Удобство такого представления зрительного образа, прежде всего, в простоте алгоритмов обработки полученных массивов чисел, в частности, в возможности применения логических операций для анализа изображения.

## Предварительная обработка изображения

В обработке зрительного образа выделяют две основные задачи. Первая – выделение контура объекта, вторая – сглаживание изображения.

Из психологии восприятия известно, что внимание концентрируется, прежде всего, на границах между более или менее однородными областями, а контур, как правило, и является такой границей. Очевидно, что при переходе к контурному изображению происходит частичная потеря информации, но предположим, что это мало скажется на качестве распознавания.

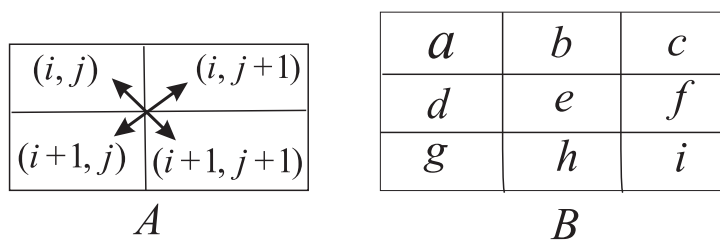


Рис. 36. Оценка градиента интенсивности

Для **выделения контура изображения** нужно выявить области, содержащие резкие изменения интенсивности, и игнорировать области с приблизительно одинаковой интенсивностью. С точки зрения анализа функции интенсивности  $g(x, y)$ , граница – это области с большим градиентом функции интенсивности. В случае аналитического задания функции интенсивности, требуется определить точки соответствующие максимальным значениям частных производных  $(\partial g/\partial x, \partial g/\partial y)$ , определяющим вектор градиента функции.

Определение градиента функции интенсивности, заданной числовой матрицей  $g(i, j)$ , осуществляется аппроксимацией градиента в ячейке  $(i, j)$ , путем вычисления перекрестного оператора Робертсона  $R(i, j)$ :

$$|\text{grad}(g(i, j))| \approx R(i, j) = \sqrt{[g(i, j) - g(i + 1, j + 1)]^2 + [g(i, j + 1) - g(i + 1, j)]^2}. \quad (231)$$

Таким образом для каждой ячейки  $(i, j)$  выделяется окно размером 2x2 (рис. 36-А), интенсивности изображения в ячейках которого сравниваются по диагоналям. Если ячейка  $(i, j)$  находится в области однородной интенсивности, то  $R(i, j) = 0$ ; если наблюдается перепад интенсивностей, то  $R(i, j) > 0$ .

Для повышения скорости вычислений оценки градиента иногда используют формулу:

$$|\text{grad}(g(i, j))| \approx F(i, j) = |[g(i, j) - g(i + 1, j + 1)]^2 + [g(i, j + 1) - g(i + 1, j)]^2|. \quad (232)$$

Величина  $F(i, j)$  находится в пределах  $0 < F(i, j) < R(i, j)$ , но характер поведения тот же самый, что и  $R(i, j)$ .

Задавая некоторый порог  $\rho_0$  для градиента интенсивности и выделяя ячейки удовлетворяющие условию  $R(i, j) > \rho_0$ , можно выделить все границы изменения интенсивности, причем степень детализации изоб-



ражения будет определяться величиной порога. Полученное в результате подобной процедуры обработки изображение называется градиентным изображением, а процесс его получения называется **градиентным дифференцированием** или выделением контуров, повышением резкости изображения.

Рассмотрим общий подход к **сглаживанию изображения** Необходимость сглаживания изображения обусловлена существованием шумов интенсивности: бликов на изображении, царапин, изломов на фотографии и т.п.

Реальная функция интенсивности состоит из двух составляющих:

$$g(i, j) = s(i, j) + \varepsilon(i, j), \quad (233)$$

где  $s(i, j)$  – идеальное изображение,  $\varepsilon(i, j)$  – шумы. Требуется оценить  $s(i, j)$  по имеющейся функции интенсивности  $g(i, j)$ . Уменьшить шумовую составляющую интенсивности можно путем сглаживания изображения. В случае сеточного изображения для дифференцирования изображения на фоне шумов следует увеличивать размеры окна (рис. 36-В). Градиент функции в ячейке  $e$  можно оценить как

$$s(e) = \sqrt{s_x^2 + s_y^2} \quad \text{или} \quad s(e) = |s_x| + |s_y|, \quad (234)$$

где

$$\begin{aligned} s_x &= [g(c) + 2g(f) + g(i)] - [g(a) + 2g(d) + g(g)], \\ s_y &= [g(g) + 2g(h) + g(i)] - [g(a) + 2g(b) + g(c)]. \end{aligned}$$

Другой способ сглаживания изображения заключается в замене функции интенсивности в точке  $(i, j)$ , скользящей средней:

$$s_\omega(i, j) = \frac{1}{S_\omega} \sum_{n,m} g(n, m), \quad (235)$$

где  $S_\omega$  – количество ячеек, составляющих окно сглаживания, а суммирование по  $n, m$  – суммирование по ячейкам, входящим в окно сглаживания. Следует помнить, что такое усреднение интенсивности может приводить, наряду с полезным эффектом очистки изображения, к его размытости, т.е. к смазыванию деталей в областях с малым изменением функции интенсивности.

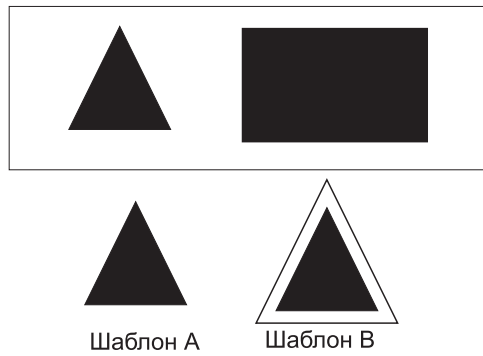


Рис. 37. Распознавание объекта в поле изображения

## Распознавание зрительных образов

Распознавание объекта в поле изображения представляет собой трудоемкую задачу, сложность которой обусловлена тем, что идентифицируемый объект может располагаться в разных местах поля изображения, быть развернутым под различными углами и т.п.

Простейший метод поиска объекта на изображении заключается в сравнении его с эталоном (шаблоном). Пусть имеется бинарное изображение (рис. 37), на котором изображены объекты: прямоугольник и треугольник. Для того, чтобы обнаружить треугольник нужно взять шаблон *A*, и последовательно передвигая его по полю изображения, добиться совпадения по уровню интенсивности областей шаблона и изображения. Если такое совпадение получено, то считаем что объект распознан. Однако при использовании шаблона *A* есть вероятность, что достаточно большая область, содержащая только изображение (например, прямоугольник полностью покрывающий треугольник), будет также принята за искомый объект, поэтому шаблон вида *B*, учитывающий окружение контура объекта, будет надежнее распознавать требуемый объект.

Формализованный алгоритм такого поиска заключается в следующем. Пусть  $g(i, j)$  – функция интенсивности дискретного изображения,  $t(i, j)$  – функция интенсивности эталона,  $\Omega$  – область определения эталона. Тогда в качестве меры соответствия между областью изображения и эталоном можно взять величину

$$M(m, n) = \sum_{i-m \in \Omega} \sum_{j-n \in \Omega} |g(i, j) - t(i - m, j - n)|, \quad (236)$$

где  $m, n$  – точка приложения эталона на изображении. Таким образом, чтобы найти объект в области изображения, нужно рассчитать  $M(m, n)$

для всевозможных значений  $m, n$  и зафиксировать те позиции, в которых  $M(m, n) = 0$  (в случае идеального изображения) и  $M(m, n) \rightarrow \min$  (для реальных объектов). В случае бинарного изображения величина  $M(m, n)$  численно равна количеству ячеек изображения, в которых уровни интенсивности изображения и эталона различны.

Величина  $M(m, n)$  обладает свойствами расстояния и ее можно выбирать по-разному, в частности, можно использовать евклидово расстояние:

$$M(m, n) = E(m, n) = \sqrt{\sum_{i-m \in \Omega} \sum_{j-n \in \Omega} (g(i, j) - t(i - m, j - n))^2}. \quad (237)$$

Сделаем следующее преобразование:

$$E^2(i, j) = \sum_{i-m \in \Omega} \sum_{j-n \in \Omega} [g^2(i, j) - 2g(i, j)t(i - m, j - n) + t(i - m, j - n)^2]. \quad (238)$$

Величина  $t(i - m, j - n)$  зависит только от вида эталона и не зависит от  $m, n$  (т.к. эта точка принадлежит изображению);  $g^2(i, j)$  принимает всегда неотрицательные значения, поэтому минимальное значение  $E^2(i, j)$ , соответствующее распознаванию объекта, эквивалентно выполнению условия  $g(i, j)t(i - m, j - n) \rightarrow \max$ .

**Определение.** *Функцией взаимной корреляции  $R_{g,t}$  называется функция вида:*

$$R_{g,t}(m, n) = \sum_{i-m \in \Omega} \sum_{j-n \in \Omega} g(i, j)t(i - m, j - n). \quad (239)$$

Эталон и объект изображения похожи, если функция взаимной корреляции стремится к максимуму. Поскольку величина  $g(i, j)$  также влияет на  $E^2(m, n)$ , то для уменьшения этого влияния рассматривают **нормированную функцию взаимной корреляции**:

$$N_{g,t}(m, n) = \frac{R_{g,t}(m, n)}{\sqrt{\sum_{i,j} g^2(i, j)}}, \quad (240)$$

которая также принимает максимальное значение, когда соответствие объекта и эталона наибольшее.

Для поиска объекта, ориентация которого в поле изображения произвольна, требуется несколько эталонов, соответствующих различным его

положениям. В этом случае существенно возрастает объем вычислений. Поэтому, как правило, глобальный эталон заменяют набором более простых локальных и осуществляют их поиск. В частности, треугольник можно рассматривать как набор трех отрезков с соответствующим взаиморасположением их концов.

Однако для объектов со сложной конфигурацией подход классификации на основе сравнения с эталоном является громоздкой в вычислительном плане процедурой, поэтому для их распознавания стараются применять различные эвристические подходы или методы структурного распознавания образов.

## **Автоматизация распознавания медицинских изображений**

Широкое использование цифровых медицинских изображений для распознавания патологических процессов и постановки диагноза требует развития компьютерных технологий автоматизации распознавания изображений. Процесс обработки изображений можно разделить на две большие категории: методы, в которых на входе и на выходе имеются изображения, и методы, где на вход поступают изображения, а на выходе возникают признаки и атрибуты, выделенные на основании этих изображений.

**Определение.** *Медицинское изображение предоставляет двумерную или трехмерную визуальную информацию о внутренних структурах и функциях человеческого тела.*

Медицинское изображение может быть получено радиологическими или нерадиологическими методами. Радиологические методы позволяют сделать доступным для визуального восприятия информацию, которая не воспринимается непосредственно зрением, нерадиологическими методами получают изображения, отснятые видеокамерой (эндоскопия) или сфотографированные (микроскопические изображения в гистологии, патологии, дерматологические изображения и т.д.). Существует несколько различных видов медицинских изображений, отличающихся как по способу получения и области применения, так и по особенностям конечного изображения. Ниже перечислены основные типы медицинских изображений.

- Ангиографические позволяют отобразить движение тока крови по артериям и венам тела. Для увеличения контраста сосудов в кровь человека вводилось рентгеноконтрастное вещество. Сосуды на ангиографических изображениях представляют собой сложные протяженные объекты с меняющимся контрастом. Поэтому основным механизмом в обработке и анализе таких изображений, позволяющим сохранить топологические свойства сосудов, является полутонное утоньшение.
- Ультразвуковые изображения – это полутонные изображения, которые синтезируются с помощью отраженных ультразвуковых волн. Получение этих изображений основано на способности ультразвука проникать внутрь органа и взаимодействовать с тканью. Ультразвуковые волны преломляются и отражаются в основном на границах регионов, которые имеют различные акустические характеристики. Современные сканеры позволяют строить трехмерные изображения.
- Гистологические изображения – цветные изображения гистологических срезов, сфотографированных с оптическим увеличением в 100-1000 раз. Объектами гистологического анализа являются фрагменты клеток и клеточных структур.
- Томографические изображения основаны на измерении и компьютерной обработке разности ослабления рентгеновского излучения различными по плотности тканями. Метод позволяет получить изображение любой области тела, включая мягкие ткани. Он также характеризуется получением большого количества проекционных изображений, что позволяет строить трехмерные модели объекта.

Алгоритмы анализа медицинских изображений в компьютерных системах диагностики направлены на решение двух взаимосвязанных задач: формальная и неформальная обработка изображения. Первая задача заключается в улучшении качества изображения, восстановлении поврежденных изображений, распознавание структурных элементов изображения. Вторая задача включает в себя выделение областей интереса, их анализ и классификацию. Причем выделенные сегменты и их характеристики должны являться отражением патологического процесса или состояния организма.

Автоматизация процесса обработки и анализа изображений состоит из следующих этапов.

- Предварительная обработка. На этом этапе обработки минимизируются погрешности, связанные с системой генерации изображения и шумами, производятся геометрические операции над изображением, такие как поворот изображения, увеличение или уменьшение масштаба изображения.
- Изменение контрастности изображения. Заключается в расчете гистограммы изображения, оценке доли пикселей для каждой градации цвета в изображении, что позволяет за счет введения дополнительной фильтрации более детально выделить зоны интереса. Существуют различные типы фильтров: низкочастотные, высокочастотные, медианные, адаптивные и другие виды цифровых фильтров. В цифровой обработке изображений широко используется линейная фильтрация, однако линейные фильтры приводят к сглаживанию перепадов яркости, а это в свою очередь усложняет задачу выделения границ. Нелинейная фильтрация имеет ряд преимуществ по сравнению с линейной: меньше искажает перепады яркости, что дает возможность точнее находить границы объектов и убирает импульсные помехи.
- Сегментация. Сегментация предназначена для выделения на изображениях областей (органы, клетки и т.д.) с определенными свойствами, которые определяет исследователь. Сегментация является сложным моментом в обработке и анализе медицинских изображений биологической ткани, так как необходимо выделять области, соответствующие различным объектам или структурам на гистологических препаратах: клеткам, органоидам, артефактам и т.д. Не существует отдельного метода или алгоритма, подходящего для решения всех типов задач сегментации — это связано с высокой вариабельностью характеристик, слабой контрастностью обрабатываемых изображений и сложной геометрической организацией объектов. Во многих случаях для получения более эффективного результата последовательно используются разные методы сегментации.
- Расчет параметров. Расчет линейных и объемных параметров выделенных анатомических образований.
- Интерпретация изображений. Автоматическая компьютерная интерпретация один из самых сложных этапов анализа. Его качественное

выполнение требует сопоставления выделенного объекта с верифицированными базами медицинских изображений.

# Лекция 15. Планирование оптимального эксперимента как наука

Организация и планирование экспериментальных исследований является важной составной частью научной деятельности по получению информации о функционировании биосистем и разработке методов их оценки их состояния и управления. В ее основе лежит математическая теория планирования эксперимента, которая разрабатывает приемы и методы оптимальной организации экспериментальных исследований.

## Общая характеристика эксперимента

Ранее эксперимент рассматривался как средство изучения явлений природы и биологических систем, в частности. Предполагалось, что проведение любого опыта должно удовлетворять требованиям чистоты. Это обозначает, что при проведении измерений, во-первых, требуется исключить все посторонние возмущения и воздействия на объект исследования и, во-вторых, предполагается полная воспроизводимость результатов измерений. Другими словами, объект исследовался как изолированное явление без учета его взаимодействия со средой. В медико-биологических исследованиях интерес представляет исследование сложных систем, содержащих много элементов, с большим количеством связей между ними и взаимодействующих с внешней средой, так называемых, ”плохоорганизованных” систем.

Планирование и проведение современных исследований имеет ряд особенностей:

- Приходится выполнять большой объем измерений, как правило, дорогостоящих, длительных, требующих высокой точности и т.п. В этих условиях эффективное планирование работ будет иметь перво-



степенное значение, поскольку никакая статистическая и математическая обработка данных плохо спланированного эксперимента не позволяет улучшить его результаты. Это можно сделать, только путем проведения нового эксперимента.

- В процессе работы широко используются ЭВМ, что увеличивает возможности эксперимента за счет применения разнообразных методов представления и анализа данных, автоматизации исследований, проведения модельных и численных экспериментов. Если раньше организацией и планированием работ занимался сам экспериментатор, а математик привлекался только для обработки и представления результатов уже проведенных экспериментов, то в настоящее время их совместная работа должна начинаться уже на стадии подготовки эксперимента. При этом основное внимание уделяется нахождению оптимальных методов измерения данных и построению оптимальных процедур их математико-статистического анализа с учетом целей исследования, природы изучаемых явлений и процессов.

Все это говорит о том, что оптимизация исследований становится важным аспектом научной деятельности, в котором эксперимент уже сам по себе является предметом исследования, а теория планирования эксперимента рассматривается, как научное направление, являющееся методологической основой современных исследований.

Для того, чтобы эксперимент мог быть объектом изучения, он должен обладать рядом некоторых общих свойств, вне зависимости от сферы предметной области исследования. К таким *общим чертам эксперимента* относятся:

- возможность исключать или оценивать влияние параметров, не принятых по тем или иным причинам к рассмотрению;
- необходимость определять точность измерительных приборов и полученных данных;
- необходимость уменьшать до разумных пределов число переменных в эксперименте;
- проверка приемлемости (правильности) полученных результатов и их точности;
- выбор и обоснование способа обработки экспериментальных данных и формы представления результатов;

- анализ полученных результатов и интерпретация их в терминах той предметной области, в которой эксперимент проводился.

Перечислим  *типовые задачи экспериментального исследования* , решаемые в процессе его планирования и проведения.

- Получение предварительных сведений об изучаемом процессе или явлении. Под этим понимается работа с литературой, анализ результатов мнений экспертов, проведение уточняющих и отсевающих экспериментов с целью очертить круг параметров, подлежащих изучению.
- Получение формульных зависимостей. На основе имеющихся данных выдвигаются предположения о характере поведения и связях между параметрами. Строятся модели изучаемого объекта на вербальном или математическом уровне.
- Проведение измерений и статистическая обработка полученных данных, включая интерпретацию полученных результатов в терминах предметной области исследований.
- Оптимизация свойств объекта. На основе полученных результатов проводятся исследования по определению оптимальных значений характеристик изучаемого объекта, по оптимальным методам воздействия на него, даются рекомендации по направлениям дальнейшего исследования.

Основоположником математической теории планирования эксперимента в ее современном понимании является Р.Фишер. Решая задачу по исследованию эффективности удобрений на урожай, он сформулировал приемы и методы дисперсионного и многофакторного анализа данных, полученных в условиях действия большого количества плохо контролируемых факторов. Дальнейшее развитие теории планирования эксперимента связано с идеями оптимального планирования такими, как последовательный анализ Вальда и планированием экстремальных экспериментов.

Теория планирования эксперимента позволяет обосновать, сколько опытов, каких опытов и в каком порядке требуется провести на каждом этапе исследований, чтобы обеспечить баланс между минимумом

затрат и требуемыми точностью и надежностью получаемых результатов и выводов. Она позволяет оптимально управлять экспериментом при неполном знании механизма изучаемого явления.

Математическим аппаратом теории планирования эксперимента являются теория вероятностей и математическая статистика, численные методы, математическое моделирование и математическое программирование, методы оптимизации и пр. В основе использования любого из методов теории планирования эксперимента лежат определенные предпосылки о свойствах изучаемых объектов. Это могут быть предположения о виде законов распределения изучаемых характеристик, их свойствах (независимость, однородность, область действия и т.п.), характере связей между ними. Вся совокупность таких предпосылок носит название *модель ситуации*. Обоснование выбора модели ситуации является фундаментом для проведения дальнейших исследований. Если модель ситуации неизвестна или не соответствует действительности, то спланировать оптимальный эксперимент, который, как правило, базируется на вполне конкретном методе математической обработки, практически невозможно. Модель ситуации может быть различной в зависимости от целей исследования, модели объекта исследования, выбранного критерия оптимальности. Например, ситуации типа: ” оценка состояния - прогноз состояния системы”, ”предельный режим - оптимальный режим функционирования”, ”интерполяция -экстраполяция значений параметров”, требуют различных планов эксперимента для изучения одной и той же исследуемой биосистемы. Таким образом, на решение о выборе плана эксперимента и способе обработки полученных результатов существенно влияет результат анализа модели ситуации.

## Описание объекта исследования

Основным понятием теории планирования эксперимента является объект исследования.

**Определение.** *Объектом исследования называется носитель некоторых неизвестных и подлежащих изучению свойств и качеств.*

Предполагается, что об объекте исследования всегда имеется некоторая априорная информация (примерный перечень переменных, характеризующих объект). Поэтому, даже не зная внутреннюю структуру и взаимосвязи между его отдельными элементами, объект исследования всегда

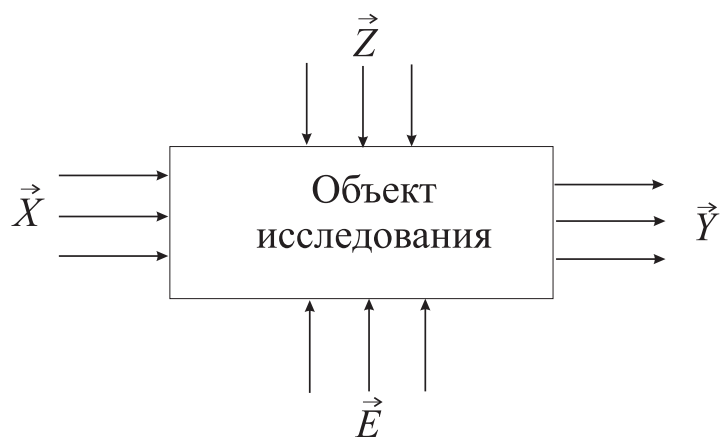


Рис. 38. Характеристики объекта исследования

можно представить в виде "черного ящика" (рис. 38) и описать следующими группами параметров:

- $\vec{X}$  входные контролируемые и управляемые параметры;
- $\vec{Z}$  входные контролируемые, но неуправляемые параметры;
- $\vec{E}$  входные неконтролируемые и неуправляемые параметры (шумы);
- $\vec{Y}$  выходные параметры (характеристики свойств объекта);

Параметры  $\vec{X}$ ,  $\vec{Y}$ ,  $\vec{Z}$  называются факторами, а  $\vec{E}$  – шумами или помехами. Примерами помех могут служить ошибки измерительных приборов или методов анализа, неконтролируемые изменения характеристик используемых веществ в различных партиях, изменение свойств приборов в результате старения или износа, квалификация экспериментатора и т.п., то есть все те характеристики, которые могут сказаться на качестве эксперимента или будут существенны при сравнении различных серий экспериментов, но в тоже время не могут полностью учтены в ходе исследования.

Величина  $\vec{Y}$  называется **откликом системы**, а ее зависимость от входных воздействий – **функцией отклика**. Геометрическое представление  $\vec{Y}$  – в пространстве входных параметров называется **поверхностью отклика**.

**Объектами исследования** в теории планирования эксперимента являются:

- реальные физические и биологические объекты (схемы, устройства, лабораторные животные, системы организма и т.п.).

- физические модели реальных объектов (модель перцептрона, имитационные и аналоговые модели и т.п.).
- математические модели реальных объектов (системы алгебраических, дифференциальных уравнений, статистические модели и т.п.).

Источниками помех, при проведении исследований над объектами исследования последних двух видов, являются округления и неточности численных расчетов, несоответствие модельных предположений исходным объектам и т.п. Особенности статистических моделей является то, что они не описывают точное поведение объекта исследования при отдельном измерении, а характеризуют некоторые усредненные свойства, проявляющиеся при многократном воспроизведении измерений в идентичных условиях.

**Определение.** *Экспериментом называется система операций, воздействий и наблюдений, направленных на получение информации об объекте исследования.*

Необходимо различать эксперимент и **опыт** – воспроизведение исследуемого явления в определенных условиях проведения эксперимента, при возможности регистрации его результатов.

Эксперименты можно классифицировать по видам: активные и пассивные. В **активном эксперименте** присутствуют факторы группы  $\vec{X}$  и исследователь, в соответствии с целями и задачами эксперимента, может их целенаправленно изменять, воздействуя на систему. Это наиболее распространенный тип эксперимента. В **пассивном эксперименте** присутствуют только факторы группы  $\vec{Z}$ , изменять которые исследователь не может, и фиксирует только соответствующую им функцию отклика. Например, влияние количества солнечных дней, которые не зависят от нашего влияния, на урожайность.

**Определение.** *Планом эксперимента называется совокупность данных, определяющих число, условия и порядок реализации опытов в эксперименте.*

Под **планированием эксперимента** понимается выбор плана эксперимента, удовлетворяющего заданным требованиям оптимальности. Таким образом, планирование эксперимента включает в себя всю совокупность действий от получения априорной информации до создания

работоспособной модели изучаемого явления, от определения оптимальных условий до реализации целей исследования с требуемой точностью.

Дадим еще несколько определений, используемых в теории планирования эксперимента.

**Определение. Точка плана** – упорядоченная совокупность численных значений факторов, соответствующая условиям проведения опыта.

**Определение. Область планирования** – область, в которой находятся точки плана, удовлетворяющие заданному плану эксперимента.

**Определение. Матрица плана** – стандартная форма записи условий проведения эксперимента в виде прямоугольной таблицы, строки которой соответствуют опытам, а столбцы уровням факторов.

**Определение. Спектр матрицы плана** – совокупность строк матрицы плана, различающихся хотя бы одним уровнем фактора.

## Измерения и принципы оценки погрешностей

Процедуры проведения измерений существенным образом определяют условия и накладывают ограничения на использование методов обработки экспериментальных данных и оценку точности результатов. Причем, повышение точности (уменьшение погрешности) может осуществляться как за счет повышения приборной точности измерений, так и за счет выбора оптимальных процедур обработки данных.

**Определение. Измерением** называется нахождение значения физической величины опытным путем с помощью специальных технических средств.

Суть измерения может быть выражена уравнением:

$$Q = q[Q], \quad (241)$$

где  $Q$  – измеряемая величина,  $q$  – числовое значение измеряемой величины,  $[Q]$  – единица величины (эталон).

Таким образом при измерении происходит сравнение измеряемой величины  $Q$  с эталоном  $[Q]$ . Сравнимые величины должны быть однородны, т.е. должны совпадать их размерности.

При последующей обработке результатов измерений важно понимать, как проводилось измерение. Можно выделить различные **виды измерений**:

- Прямые – измеряемая величина  $Q$  пропорциональна наблюдаемой  $X$  с заданным коэффициентом пропорциональности  $c$ :  $Q = cX$ . Примером прямого измерения является взвешивание предмета на пружинных весах, когда величина растяжения пружины пропорциональна весу предмета.
- Косвенные – измеряемая величина является известной функцией от непосредственно наблюдаемых  $Q = f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ . Например, сопротивление участка электрической цепи рассчитывается по измеренным значениям силы тока и напряжения.
- Совместные – измерением является нахождение функциональной зависимости  $Y = f(X)$  между величинами  $X$  и  $Y$ , путем измерения ряда пар значений  $(X_1, Y_1)$   $(X_2, Y_2)$   $(X_3, Y_3)$  и т.д. Совместным измерением является построение вольт-амперной характеристики прибора.
- Совокупные – значения набора величин  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$  определяются путем измерения сумм или разностей  $Y_i$  этих величин в различных сочетаниях и решения системы уравнений:

$$Y_i = \sum_j C_{i,j} Q_j, \quad \text{где } C_{i,j} = \pm 1.$$

Примером совокупных измерений может являться калибровка наборов разновесов.

Данная классификация не является строгой, однако она удобна с точки зрения понимания особенностей обработки измерений.

Качество результата измерения определяется степенью близости его к истинному значению измеряемой величины. Оно описывается с помощью показателей погрешности (отрицательный характер) или точности (положительный характер), т.е. **погрешность** характеризует отклонение измеренного значения от истинного, а **точность** – близость измеренного значения к истинному. С методологической точки зрения истинное значение это абстрактное (гипотетическое) значение, которое нам неизвестно, поэтому и погрешность измерения точно определить нельзя. Ее можно только оценить. Оценка погрешностей опирается на ряд принципов, использование которых позволяет получить объективное представление о точности измерений:

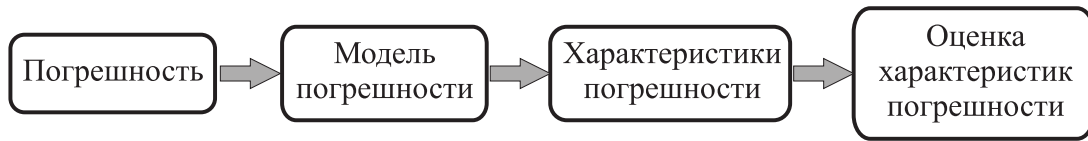


Рис. 39. Процесс оценивания погрешности

- погрешность оценивают приближенно, согласуя с целью измерения;
- погрешность оценивают верхней границей;
- стремятся получить эффективную реалистическую оценку погрешности.

С учетом погрешностей измерений уравнение (241) может быть записано в следующем общем виде:

$$\tilde{Q} = Q + \delta_{\tilde{Q}} = (q + \delta_q)([Q] + \delta_{[Q]}), \quad (242)$$

где  $\delta_{\tilde{Q}}$  – погрешность результата измерения,  $\delta_q$  – погрешность нахождения числового значения измеряемой величины,  $\delta_{[Q]}$  – погрешность эталона (единицы измерения).

**Оценивание погрешности** (рис. 39) состоит из последовательности этапов. В начале определяется вид погрешности и ее возможные источники. Различают два вида погрешностей: случайные и систематические. Принципиальное различие между ними в том, что случайная погрешность приводит к отклонениям измеренных значений, как в большую, так и меньшую сторону, относительно истинного значения, а систематическая погрешность приводит к смещению измеренного значения относительно истинного.

На следующем этапе выбирается модель погрешности. В зависимости от вида погрешности она может быть детерминированная или стохастическая. Детерминированные модели погрешности делятся на числовые и функциональные и служат для описания систематических составляющих погрешностей. Стохастические модели предназначены для описания случайных составляющих погрешностей и могут быть описаны при помощи статистических или случайных функций, нечетких множеств и т.д. К характеристикам погрешности относят 1) точечные характеристики, такие как среднеквадратичное отклонение, предельное и абсолютное отклонения и, 2) интервальные характеристики – доверительные интервалы.



Для корректной оценки погрешности измерений необходимо проанализировать все возможные источники составляющих погрешности. Особенно это важно для оценки систематических погрешностей, т.к. если источник систематической составляющей погрешности неизвестен, то оценить его вклад в погрешность невозможно; в отличие от случайных составляющих – оценить которые всегда возможно с заданной точностью, путем организации соответствующего плана измерений.

В процессе оценки погрешностей вначале оцениваются отдельные случайные и систематические составляющие погрешностей, затем производится суммирование составляющих каждого вида (по своим законам) из которых составляется оценка полной погрешности измерений. Все необходимые формулы и приемы суммирования составляющих погрешностей можно посмотреть в многочисленных справочниках и руководствах по метрологии измерений.

## Принципы оптимального планирования

Основная идея теории планирования эксперимента – возможность оптимального проведения исследования в условиях неполного знания механизма изучаемого явления. Она базируется на ряде основополагающих принципов, направленных на повышение эффективности планирования, т.е. на получение максимума информации об объекте исследования при минимуме затрат. К числу таких принципов можно отнести следующие.

- Отказ от полного перебора входных состояний. Если значения входных параметров непрерывны, то для получения исчерпывающей информации об изучаемом объекте или процессе необходимо бесконечное число опытов, т.к. всегда существует возможность пропустить особенность функции отклика, близкую к  $\delta$ -функции. Очевидно, что полный перебор всех входных состояний на практике не реализуем. Поэтому в теории планирования эксперимента сознательно отказываются от полного перебора входных состояний, постулируя определенную гладкость функции отклика.
- Принцип последовательного планирования. В отсутствие или малости априорной информации нет необходимости строить сложную модель объекта исследования. Планирование эксперимента для сложной модели сопровождается большими затратами, в то время как,

она может привести к тем же результатам, что и простая модель, вследствие внутренних свойств самого объекта исследования. Поэтому логично вначале предложить и исследовать простую модель, проверить ее пригодность и по мере необходимости усложнять.

- Принцип сопоставления с шумами. Точность модели объекта исследования должна соответствовать интенсивности помех. Чем ниже уровень помех, тем более точной (сложной) может быть модель и, наоборот, чем выше уровень помех, тем выше вероятность того, что более простая модель будет работоспособной.
- Принцип рандомизации. Эксперимент должен быть так спланирован, чтобы систематические действующие, не поддающиеся контролю факторы можно было бы рассматривать как случайные воздействия и учитывать их статистическими методами. Например, применять случайный выбор объектов для измерения из общей совокупности или случайный порядок проведения опытов.
- Принцип оптимальности планирования. План эксперимента должен обладать некоторыми свойствами оптимальности, с точки зрения выбранного критерия качества. Форма критерия зависит от цели, вида объекта исследования, методов измерения, типов параметров и т.п.

## **Постановка задачи оптимизации и оценки параметров**

Оценка параметров, характеризующих поведение объекта исследования, является задачей оптимального планирования. Их знание необходимо для управления состоянием биосистемы, как с точки зрения оптимизации переходных процессов, так и с точки зрения функционирования системы в заданном режиме. Оценка параметров предполагает решение двух видов задач.

1. Нахождение таких значений входных параметров  $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ , которые обращали бы в максимум (минимум) функцию отклика системы  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

2. Нахождение таких значений входных параметров  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , которые бы соответствовали заданным значениям функции отклика:

$$y_j = f_j(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), j = \overline{1, m}.$$

Формально эти задачи можно рассматривать как эквивалентные. Действительно, если вид функции отклика известен, то для оценки параметров  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  можно использовать метод наименьших квадратов. В этом случае задача оценки параметров сведется к задаче нахождения экстремума (минимума) функционала:

$$\Phi(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \sum_{j=1}^m [y_j - f_j(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)]^2. \quad (243)$$

Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать только методы оптимального планирования поиска параметров, соответствующих экстремуму функции отклика.

В общем случае функция отклика может зависеть от времени  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$ , на переменные модели могут накладываться дополнительные ограничения вида  $g_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_j, j = \overline{1, k}$ . При этом задача поиска оптимальных значений параметров может существенно усложниться.

## Виды критериев оптимизации

Планирование оптимального эксперимента предполагает что эксперимент должен удовлетворять некоторому критерию оптимизации, зависящему от характеристик объекта исследования. А найденные параметры биосистемы соответствовали оптимуму заданного критерия. Видов критериев оптимизации достаточно много, поэтому существуют различные варианты их выбора, определяемые целями исследования, свойствами изучаемой системы и т.п. Рассмотрим, наиболее часто используемые **виды критериев оптимизации**.

- Критерий минимума среднеквадратичной ошибки. Он удобен при решении математических задач оптимизации и при оценке качества работы систем автоматического регулирования. Пусть  $h(t)$  – требуемое значение функции отклика системы, а  $y(t)$  – измеряемое в

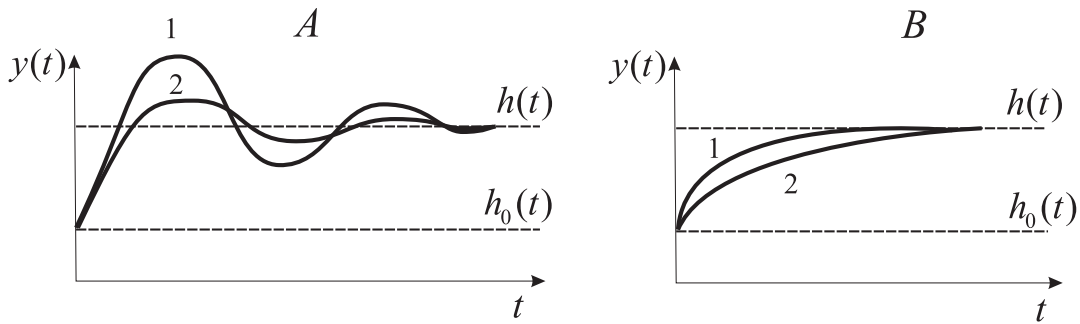


Рис. 40. Виды переходных процессов

текущий момент времени. Критерием оптимальной работы системы будет выполнение требования:

$$\varepsilon^2 = |y(t) - h(t)|^2 \rightarrow \min. \quad (244)$$

Требование минимума величины  $\varepsilon^2$  обозначает, что параметры системы, соответствующие оптимальной работе, будут более значимо учитывать нежелательность больших по значению отклонений, по сравнению с малыми. Если потребовать, чтобы вред наносимой ошибкой был пропорционален ее величине, то критерий качества можно записать в более простом для вычислений виде:

$$\varepsilon = |y(t) - h(t)| \rightarrow \min. \quad (245)$$

- **Интегральные критерии.** Используются для оптимального функционирования и определения параметров систем в переходных режимах работы. Рассмотрим различные типы переходных процессов (рис. 40). В случае А выход на новый режим функционирования происходит с колебаниями различной по величине амплитуды. Для оценки величины колебаний можно использовать критерий следующего вида:

$$I_1 = \int_0^{\infty} |y(t) - h(t)|^2 dt. \quad (246)$$

Функционирование системы удовлетворяющее требованию  $I_1 \rightarrow \min$ , определяет оптимальный переходный процесс, сопровождающийся минимумом колебаний выходного параметра системы.

Если нас интересует плавность выхода системы на новый режим функционирования (рис. 40-В), то в качестве критерия качества

можно использовать выражение вида:

$$I_2 = \int_0^{\infty} \left( \frac{\partial(y(t) - h(t))}{\partial t} \right)^2 dt. \quad (247)$$

Потребовав, чтобы  $I_2 \rightarrow \min$ , получим оценку параметров переходного режима системы, соответствующих минимальной скорости изменения рассогласования.

В случае, когда важна оптимизация как по отклонению, так и по плавности выхода на режим функционирования, наилучшие параметры будут соответствовать выполнению требования

$$I_1 + I_2 \rightarrow \min.$$

- **Стоимостные критерии.** Направлены на оптимизацию стоимости затрат при проведении исследования. Например, требуется провести обследование некоторой группы населения с помощью определенной методики. Обозначим:  $k_1$  – среднее количество простаивающих приборов при отсутствии людей в очереди, если запланировано использование большого числа приборов;  $k_2$  – среднее число людей, простаивающих в очереди, если запланировано малое количество приборов;  $c_1$  – стоимость простоя прибора в единицу времени (например, аренда, оплата специалистов и т.п.);  $c_2$  – средняя стоимость потерь, связанных с отвлечением людей от работы. В этом случае непроизводительные стоимостные потери при проведении обследования можно оценить как

$$S = k_1 c_1 + k_2 c_2.$$

Планирование обследования следует проводить с учетом требования  $S \rightarrow \min$ .

Другой тип планирования на основе стоимостных критериев может быть связан с максимизацией стоимости продукции в условиях ограничений на ресурсы и т.п.

- **Минимаксные критерии.** Основаны на требовании планирования исследований таким образом, чтобы минимизировать максимально возможный наихудший результат. Рассмотрим принципы построения

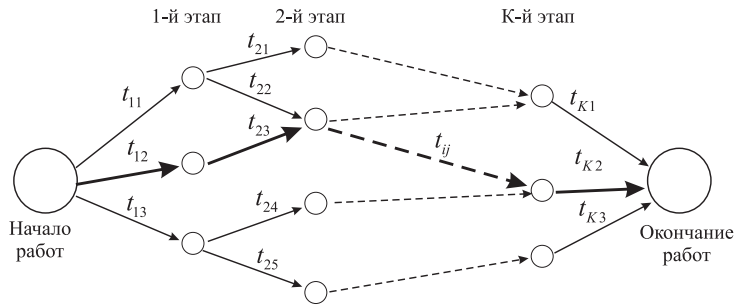


Рис. 41. Сетевой граф планирования работ

такого критерия на примере задач сетевого планирования. Сетевое планирование используется при проведении сложных научно-исследовательских работ, крупных медицинских мероприятий и т.п. Решение таких задач можно разбить на отдельные этапы, каждый из которых содержит виды работ, которые можно выполнять одновременно. Причем работы каждого последующего этапа опираются на результаты предыдущих этапов работ и оцениваются временными затратами необходимыми на их выполнение:  $t_{ij}$  – время, требуемое для выполнения  $j$ -го вида работ на  $i$ -м этапе. Всю последовательность действий можно представить в виде сетевого графа (рис. 41), в котором узлы соответствуют видам работ, а связи между ними логической последовательности действий. Каждому пути по связям, от начала работ до их завершения, соответствует некоторое время выполнения работ. Определим максимальный срок завершения всех работ как критическое время выполнения работ (на рисунке ему соответствует путь, выделенный жирными стрелками):

$$T_{\text{кр}} = \max_j \sum_{i=1}^k t_{ij}. \quad (248)$$

Очевидно, что оптимизация планирования может осуществляться за счет минимизации именно критического времени, путем перераспределения ресурсов на различных этапах выполнения работ с целью уменьшения  $T_{\text{кр}}$ :

$$T_{\text{опт}} = \min_i \max_j t_{ij}. \quad (249)$$

Критерии такого вида называются минимаксными критериями. Другой пример минимаксного критерия будет рассмотрен в следующем параграфе.

## Контрольные вопросы и задания

1. Почему в медико-биологическом исследовании невозможно учесть и исключить всевозможные посторонние воздействия и возмущения?
2. Поясните в чем отличие эксперимента от опыта?
3. Что может являться источниками помех при использовании математической модели биотехнической системы в качестве объекта исследования?
4. Почему систематический и серийный отбор при выборочном наблюдении создают благоприятные условия для возникновения корреляционной связи между измеренными значениями?
5. В исследовании по определению артериального давления при физической нагрузке приведите примеры контролируемых и управляемых, контролируемых и неуправляемых факторов, шумов.

# Лекция 16. Оптимальные стратегии одномерного поиска экстремума

## Контрольные вопросы и задания

### Минимаксный критерий поиска экстремума

Минимаксный критерий определяет оптимальную стратегию поиска экстремума, которая не требует знания аналитического вида зависимости функции отклика объекта исследования от входных воздействий. Такие стратегии называются *методами прямого поиска* экстремума. Другими словами, в прямых методах поиска экстремума не используются (или вообще отсутствуют) функциональные соотношения между входными и выходными параметрами изучаемой системы, а предлагаются алгоритмы действий, приводящие к успеху. К прямым методам оптимизации относят и методы нахождения экстремума аналитически заданных функций путем численного расчета их значений в заданных точках, что можно также рассматривать как определенным образом спланированный численный эксперимент. Опытами в таком эксперименте являются вычисления значений функции при заданных значениях аргумента.

В основе стратегий прямого поиска экстремума лежит понятие унимодальности функций.

**Определение.** *Функция  $f(x)$  на интервале  $[a, b]$  называется строго унимодальной, если она строго возрастает (убывает) при  $x < x_0$  и строго убывает (возрастает) при  $x > x_0$ , где  $x_0$  – точка максимума (минимума).*

Унимодальные функции обладают следующим свойством. Для определенности будем рассматривать минимум функции. Если две точки  $x_1$  и  $x_2$  лежат по одну сторону от точки  $x_0$  минимума функции  $f(x)$ , то из соотношения  $f(x_1) < f(x_2)$  всегда следует, что точка  $x_1$  находится ближе к



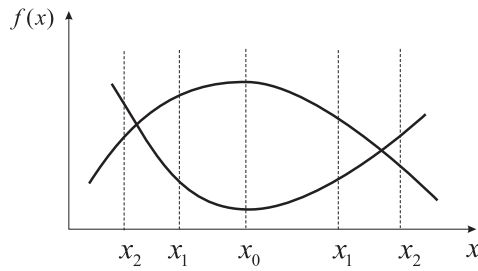


Рис. 42. Свойство унимодальных функций

точке минимума функции, чем  $x_2$  (рис 42). Таким образом, проводя измерения унимодальной функции отклика и анализируя полученные значения, всегда можно локализовать область нахождения экстремума более точно. В случае максимума функции отклика, из условия  $f(x_1) < f(x_2)$  будет следовать, что точка  $x_1$  находится дальше от точки максимума функции, чем  $x_2$ .

Пусть функция  $f(x)$  унимодальна на интервале  $[a, b]$ . Это обозначает, что пока не произведено никаких измерений значений функции, любое значение  $x$  из промежутка  $[a, b]$  может рассматриваться как экстремум функции, а сам промежуток как интервал неопределенности локализации экстремума. Обычно в качестве точки экстремума берется середина интервала неопределенности  $x = (a + b)/2$ .

Рассмотрим эксперимент, состоящий из трех измерений значений функции, минимум которой требуется определить. Точки  $x_1, x_2, x_3$ , в которых будем проводить измерения выберем произвольно внутри промежутка  $[a, b]$ . В силу того, что функция может иметь любой характер изменения и достигать экстремума в любой точке, соотношения между значениями функции в этих точках могут быть различные (рис. 43). Пусть  $K$  – номер измерения, в котором получен наилучший результат, т.е. минимальное значение функции. Если  $K = 1$ , то в силу унимодальности функции  $f(x)$ , значение аргумента  $x_0$ , соответствующее минимуму функции, удовлетворяет условию  $a < x_0 < x_2$ ; при  $K = 2$ :  $x_1 < x_0 < x_3$ ; при  $K = 3$ :  $x_2 < x_0 < b$ .

Очевидно, что интервал неопределенности локализации экстремума зависит как от количества измерений, так и от стратегии поиска, т.е. выбора точек, в которых проводятся измерения. Обозначим через  $l^N(x_i, K)$  интервал неопределенности, полученный после  $K$ -го измерения в серии из  $N$  измерений при заданной стратегии выбора точек  $x_i$ . Величину  $l^N(x_i, K)$  можно рассматривать как меру эффективности поиска экстре-

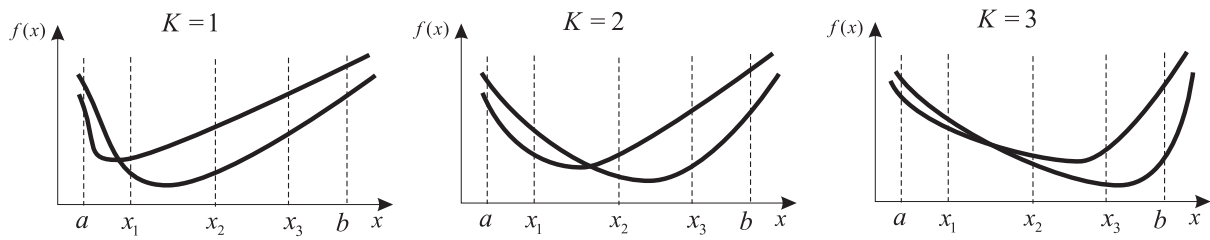


Рис. 43. Возможные результаты измерений значений функции ( $N = 3$ )

му. Как можно оценить ее априорно, т.е. как можно оценить эффективность стратегии поиска экстремума до проведения измерений? Для этого найдем наибольший интервал неопределенности:

$$L^N(x_i) = \max_{i \leq K \leq N} \{l^N(x_i, K)\}. \quad (250)$$

Видно, что полученная величина не зависит от номера интервала  $K$ , в котором находится минимум функции. Причем  $L^N(x_i)$  определяет наибольший (т.е. наихудший) из всех возможных интервалов локализации экстремума при выбранной стратегии выбора точек измерения.

Дальнейшая оценка качества поиска экстремума связана с оптимизацией стратегии поиска, т.е. требуется таким образом выбирать точки  $x_i$ , чтобы минимизировать  $L^N(x_i)$ :

$$L_{\text{опт}}^N = \min_i \max_{i \leq K \leq N} \{l^N(x_i, K)\}. \quad (251)$$

Величина  $L_{\text{опт}}^N$  определяет наилучшую стратегию планирования поиска экстремума, основанную на **минимаксном критерии оптимизации**. Другими словами, максимально возможный интервал неопределенности локализации экстремума после серии из  $N$  измерений не может превышать  $L_{\text{опт}}^N$  при выбранной стратегии измерений.

## Оптимальная стратегия пассивного эксперимента

В зависимости от требований к условиям проведения исследований и вида эксперимента оптимальные стратегии выбора точек  $x_i$ , в которых проводятся измерения, могут задаваться различным образом.

В оптимальных стратегиях **пассивного эксперимента** точек  $x_i$ , в которых проводятся измерения, задается заранее, т.е. до получения и оценки промежуточных результатов. В активном или **последовательном эксперименте** выбор каждой последующей точки измерения за-

висит от анализа результатов измерений, полученных в предыдущей точке измерения. С этой точки зрения, активный эксперимент существенно более экономный, по количеству опытов, по сравнению с пассивным, тем не менее, если каждый опыт требует длительных временных затрат, то общее время всего исследования может быть достаточно длительным. В ряде случаев, когда критерием оптимизации является минимизация времени проведения исследований или же условия эксперимента невозможно повторить (например, наблюдение солнечного затмения и т.п.), пассивный эксперимент, позволяющий проводить все измерения параллельно, является единственно возможным методом исследования.

Рассмотрим оптимальную стратегию пассивного эксперимента основанную на минимаксном критерии (251). Предположим, что экстремальное значение унимодальной функции находится в единичном интервале  $[a, b] = [0, 1]$ . Очевидно, что одно измерение  $N = 1$  не позволяет уменьшить интервал неопределенности локализации экстремума функции (это следует из свойства унимодальности).

Пусть эксперимент состоит из двух измерений  $N = 2$ . Обозначим точки, в которых проводятся измерения, через  $x_1$ , и  $x_2$ , причем  $0 < x_1 < x_2 < 1$ . Как выбрать эти точки таким образом, чтобы интервал, в котором будет локализован экстремум функции был наименьшим? При  $K = 1$  экстремум  $x_0 \in [0, x_2]$ , при  $K = 2$  экстремум  $x_0 \in [x_1, 1]$ . Оптимальная стратегия выбора точек, в которых нужно проводить измерения, будет удовлетворять условию:

$$L_{\text{опт}}^2 = \min_i \max_{1 \leq K \leq 2} \{x_2 - 0, 1 - x_1\}, \text{ где } i = 1, 2. \quad (252)$$

Нетрудно увидеть, что оптимальный интервал неопределенности  $L_{\text{опт}}^2 = 0,5$  при  $x_1 = x_2$ , а во всех остальных случаях  $L_{\text{опт}}^2 > 0,5$ . Другими словами, оптимальный результат будет достигаться, если оба измерения проводить в середине исходного интервала неопределенности. Однако при этом невозможно будет различить значения функции отклика. Обозначим через  $\varepsilon$  **погрешность измерительной аппаратуры** – минимальную величину между значениями  $x_1$  и  $x_2$  входного параметра, которая позволяет обнаружить разницу в измеренных значениях функции отклика.

Таким образом, оптимальная минимаксная стратегия поиска экстремума в эксперименте, состоящем из двух измерений, будет заключаться в том, чтобы проводить измерения функции отклика в точках сим-

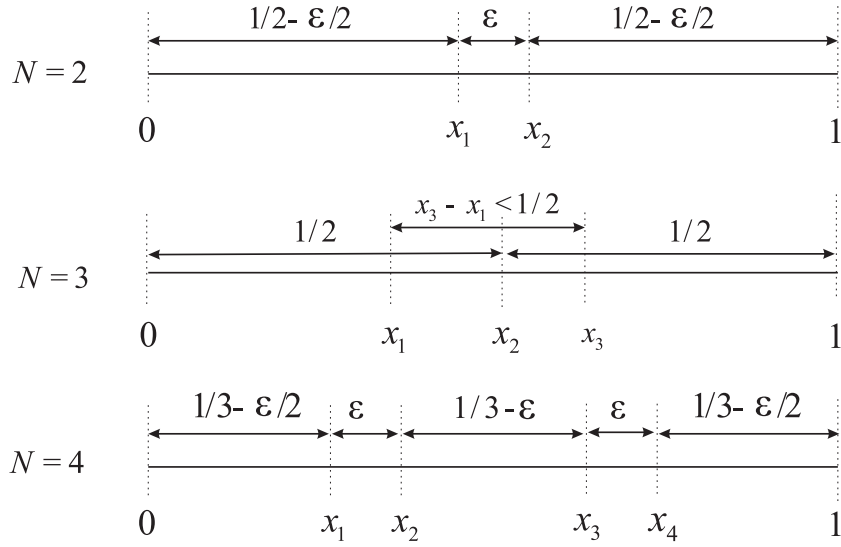


Рис. 44. Выбор точек измерения в пассивном парном эксперименте

метричных относительно середины исходного интервала неопределенности на расстоянии, равном  $\epsilon$ -погрешности измерительной аппаратуры:  $x_1 = 0,5 - \epsilon$ ,  $x_2 = 0,5 + \epsilon$  (рис. 44). Оптимальный интервал неопределенности локализации экстремума будет равен  $L_{\text{опт}}^2 = 0,5 + \epsilon/2$ .

В случае проведения трех измерений  $0 < x_1 < x_2 < x_3 < 1$ , оптимальный интервал неопределенности будет определяться условием

$$L_{\text{опт}}^3 = \min_i \max_{1 \leq K \leq 3} \{x_2 - 0, x_3 - x_1, 1 - x_2\}. \quad (253)$$

Видно, что оптимальное значение интервала неопределенности будет равно  $L_{\text{опт}}^3 = 0,5$  при следующей стратегии выбора точек  $x_i$ : второе измерение должно проводиться в середине исходного интервала неопределенности  $x_2 = 0,5$ , а первое и третье измерение может проводиться в любых точках, удовлетворяющих условию  $x_3 - x_1 < 0,5$ . Таким образом, добавление третьего измерения в случае пассивного эксперимента улучшает результат только на  $\epsilon/2$  и может давать существенный выигрыш в точности, по сравнению с экспериментом с двумя измерениями, только в случае большой измерительной погрешности. Это утверждение справедливо для любого нечетного числа опытов в пассивном эксперименте. Поэтому поиск экстремума ведут при помощи **парного эксперимента**: точки, в которых производятся измерения, группируются парами на расстоянии  $\epsilon$  друг от друга, а сами пары располагают равномерно на исходном интервале неопределенности (рис. 44). Аналитически значения

$x_i$  при проведении  $N$  измерений определяются выражением:

$$x_i = \frac{(1 + \varepsilon)}{N/2 + 1} \left[ \frac{i + 1}{2} \right] - \left( \left[ \frac{i + 1}{2} \right] - \left[ \frac{i}{2} \right] \right), \quad (254)$$

где  $[i]$  – целая часть  $i$ .

Оптимальный интервал неопределенности при  $\varepsilon$ -минимаксной стратегии пассивного эксперимента с  $N$  измерениями равен

$$L_{\text{опт}}^N = \frac{1 + \varepsilon}{N/2 + 1}. \quad (255)$$

Оптимальные стратегии пассивного эксперимента по нахождению экстремума требуют значительного числа опытов. Так, например, для уменьшения исходного интервала неопределенности локализации экстремума в 100 раз требуется 198 измерений. Стратегии последовательного эксперимента, рассматриваемые ниже, существенно уменьшают число опытов, необходимых для локализации экстремума с заданной точностью.

## Оптимальные стратегии последовательного эксперимента

Минимаксные стратегии последовательного эксперимента можно реализовать различным образом. Будем рассматривать произвольный интервал неопределенности  $[a, b]$ . Оптимальная стратегия поиска экстремума методом *дихотомии* заключается в том, что первые две точки  $x_1$  и  $x_2$ , в которых проводятся измерения, выбираются в середине исходного интервала неопределенности на расстоянии  $\varepsilon$  друг от друга (рис. 45-А). После сравнения измеренных значений функции отклика отбрасывается один из интервалов  $[a, x_1]$  или  $[x_2, b]$ . Вторая пара точек  $x_3$  и  $x_4$  выбирается в середине оставшегося интервала неопределенности на расстоянии  $\varepsilon$  друг от друга и т.д. Оптимальный интервал неопределенности после  $N$  измерений будет равен

$$L_{\text{опт}}^N = (b - a)2^{-N/2} + (1 - 2^{-N/2})\varepsilon. \quad (256)$$

Анализируя рассмотренную выше стратегию поиска экстремума, можно заметить, что на каждом этапе парных измерений, в интервале неопределенности присутствует еще одна точка, оставшаяся от предыдущего

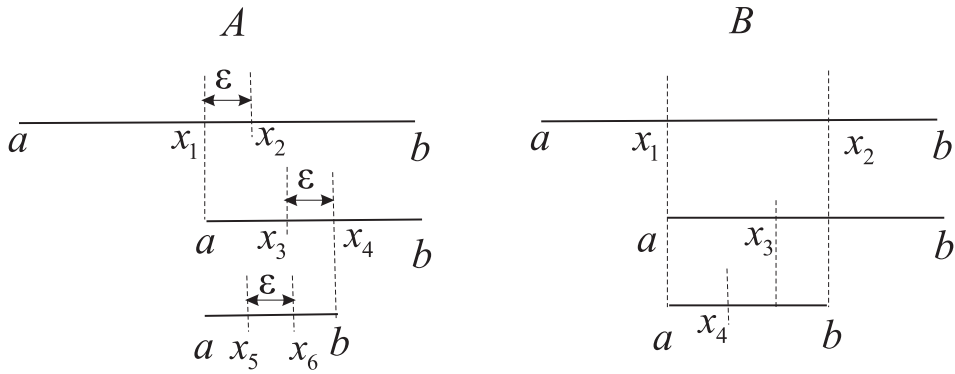


Рис. 45. Выбор точек измерения в последовательном эксперименте

этапа, в которой результат измерения уже известен. Поэтому ее можно использовать в качестве одной из точек на следующем шаге итерационной процедуры. Поскольку заранее неизвестно, какая из точек  $x_1$  или  $x_2$  будет использоваться на следующем шаге, для оптимальной стратегии их необходимо выбирать симметрично относительно середины интервала неопределенности. Тогда, зная, расположение одной из точек внутри интервала неопределенности, всегда можно определить расположение другой.

Эта идея реализована в методах **Фиббоначи** и **"золотого сечения"** (рис. 45-В). В методе Фиббоначи первые две точки, в которых проводятся измерения, выбираются на расстояниях  $L^2$  от концов интервала  $[a, b]$ :

$$L^2 = (b - a) \frac{F_{N-1}}{F_N} + \frac{(-1)^N}{F_N} \epsilon. \quad (257)$$

Здесь  $F_N$  – числа Фиббоначи, вычисляемые по рекуррентной формуле:

$$F_0 = F_1 = 1, \quad F_{k+1} = F_{k-1} + F_k. \quad (258)$$

После анализа значений функции в этих точках, одна из них становится граничной точкой интервала локализации экстремума, а другая остается для последующей пары измерений. Каждая последующая точка выбирается симметрично относительно оставшейся в интервале неопределенности. Оптимальный интервал неопределенности после  $N$  измерений будет равен:

$$L_{opt}^N = \frac{(b - a)}{F_N} + \frac{F_{N-2}}{F_N} \epsilon. \quad (259)$$

Несмотря на то, что поиск экстремума методом Фиббоначи является наиболее оптимальной одномерной минимаксной стратегией, его неудобство в том, что стратегия выбора первых двух точек  $x_1$  и  $x_2$ , в которых

проводятся измерения, приводит к наименьшему интервалу неопределенности локализации экстремума только после проведения всех  $N$  измерений.

В методе "золотого сечения" такого ограничения нет – поиск экстремума можно завершать после любого числа измерений и при этом будет гарантирован наилучший результат.

**Определение.** *Золотым сечением* отрезка называют точку, которая делит его на две части так, что отношение длины всего отрезка к длине его большей части равно отношению длины большей части к длине меньшей части.

У каждого отрезка существуют две точки золотого сечения, расположенные симметрично относительно концов промежутка  $[a, b]$ , которые и выбираются в качестве точек, в которых проводятся измерения:

$$x_1 = a + (1 - \tau)(b - a), \quad x_2 = a + \tau(b - a), \quad (260)$$

здесь  $\tau = (1 + \sqrt{5})/2 \approx 1,6180\dots$  – отношение золотого сечения. Причем, точка  $x_1$  является также точкой "золотого сечения" отрезка  $[a, x_2]$ , а точка  $x_2$  является точкой "золотого сечения" отрезка  $[x_1, b]$ , поэтому на указанных интервалах нужно доопределять только одну точку в которой следует проводить измерения. Оптимальный интервал неопределенности после  $N$  измерений будет равен

$$L_{\text{опт}}^N = \frac{(b - a)}{\tau^{N-1}}. \quad (261)$$

Последовательные стратегии поиска экстремума дают существенный выигрыш в количестве проводимых измерений по сравнению с пассивными. Например, для уменьшения интервала неопределенности в 100 раз по сравнению с исходным требуется порядка 11 измерений для метода Фибоначи и 13-14 для методов дихотомии и "золотого сечения".

# Лекция 17. Методы многомерного поиска экстремума

## Рельеф функции

В стратегиях случайного поиска не требуется никаких предположений относительно вида и свойств функции отклика системы. Если же информация об этом имеется, то ее можно использовать для построения последовательных стратегий многомерного поиска. Наиболее часто используется информация о рельефе функции отклика системы.

Функция  $F(x_1, x_2)$  представляет собой некоторую произвольную поверхность в трехмерном пространстве (рис. 46). Рельеф этой поверхности можно оценить по поведению линий уровня функции.

**Определение.** *Линиями уровня функции  $F(x_1, x_2)$  называются проекции  $F(x_1, x_2) = const$  на плоскость  $\{x_1, x_2\}$ .*

Там где линии уровня расположены близко одна к другой, функция изменяется наиболее быстро и, наоборот, если линии уровня отстоят далеко одна от другой, то скорость изменения функции в этих точках будет мала. В тех случаях, когда линии уровня представлены гладкими кривыми не имеющими изломов, рельеф функции является котловинным, в противном случае – овражным. Аналитически, котловинный рельеф функции характеризуется дифференцируемостью функции отклика во всех точках области ее определения.

Анализируя рельеф функции можно предложить алгоритм построения траекторий, вдоль которых функция убывает (возрастает) достигая минимума (максимума). Проблема заключается в том, что из одной и той же точки можно предложить бесконечное множество направлений вдоль которых функция нескольких переменных может убывать или возрастать, в отличие от одномерного случая, где такие направления являются единственными. Различные методы последовательного многомерного поиска отличаются способом задания траекторий.



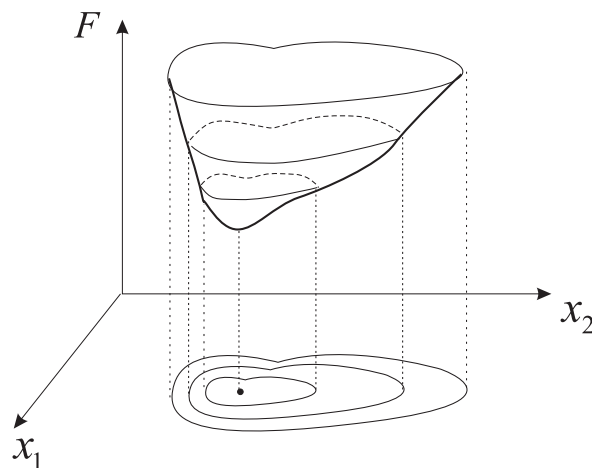


Рис. 46. Линии уровня функции

## Метод случайного поиска

Прямые методы решения задач оптимизации функции многих переменных, также как и в одномерном случае, основаны на вычислении и сравнении значений функций  $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$  в точках задаваемых в соответствии с некоторой стратегией. Задавая последовательность точек уменьшающих (увеличивающих) значение функции оклика, можно локализовать минимум (максимум) функции с любой наперед заданной точностью.

В отличие от одномерного случая, не существует эффективных критериев оценки оптимальности поиска экстремума для функций многих переменных. Другой серьезной проблемой использования прямых методов нахождения экстремума является ”проклятие размерности” – количество вычислений возрастает пропорционально  $n$ -й степени размерности.

Эффективным пассивным методом поиска экстремума многомерных функций является *метод случайного поиска* или метод Монте-Карло. Рассмотрим двумерный случай (рис. 47). Пусть исходная область, в которой локализован экстремум унимодальной функции двух переменных  $F(x_1, x_2)$ , составляет квадрат со стороной 1. Для определенности будем рассматривать максимум функции. До проведения измерений любая точка внутри квадрата может рассматриваться, как точка максимума функции. Разобьем квадрат на  $k$  областей одинаковой площади. Выберем случайным образом одну из полученных областей и проведем в какой либо ее точке  $(x_1^*, x_2^*)$ , например, в центре области, измерение значения функции. Вероятность  $P$  того, что измерение было произведено в области,

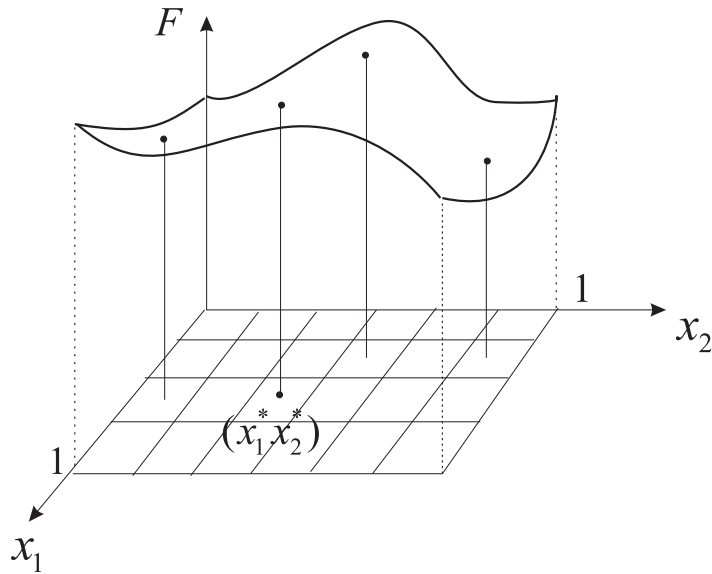


Рис. 47. Метод случайного многомерного поиска

содержащей максимум функции, равна  $1/k$ . То есть можно утверждать, что измеренное значение функции  $F(x_1^*, x_2^*)$  является экстремумом и в результате одного измерения удалось уменьшить область локализации экстремума в  $k$  раз с вероятностью  $1/k$ .

Проведем измерения значений функции в двух областях, выбранных случайным образом. Из полученных значений выберем наибольшее. Вероятность  $P$  того, что наибольшее измеренное значение оказалось в области содержащей максимум функции можно оценить по следующей формуле:

$$P = 1 - \left(1 - \frac{1}{k}\right)^2.$$

Аналогично после проведения измерений в  $n$  случайным образом выбранных областях, вероятность того, что наибольшее измеренное значение будет находится в области локализации экстремума в  $k$  раз меньше исходной будет равна:

$$P = 1 - \left(1 - \frac{1}{k}\right)^n. \quad (262)$$

Откуда можно оценить число измерений, необходимых для уменьшения области локализации экстремума функции в  $k$  раз с надежностью  $P$ :

$$n = \left[ \frac{\ln(1 - P)}{\ln\left(1 - \frac{1}{k}\right)} \right] + 1, \text{ где } [ ] - \text{целая часть числа.} \quad (263)$$

В частности, для уменьшения области локализации экстремума в 10 раз с надежностью  $P \approx 0,84$  требуется 18 измерений, а с надежностью  $P \approx 0,99$  — 44 измерения.

Таким образом, оптимальная стратегия случайного поиска экстремума функции многих переменных заключается в задании параметров поиска экстремума:  $k$  - числа, определяющего во сколько раз нужно уменьшить исходную область локализации экстремума, и  $P$  - надежности с которой требуется это сделать. Затем оценить необходимое число измерений  $n$  по формуле (262) и произвести измерения значений функции в  $n$  точках, задаваемых случайным образом, например с использованием датчика случайных чисел. Наибольшее измеренное значение будет соответствовать максимуму функции.

## Градиентные методы поиска экстремума

Рассмотрим группу методов последовательного поиска экстремума, называемых *градиентными методами*. Для определенности будем рассматривать нахождение минимума функции. Идея всех методов основана на том, чтобы из произвольно взятой начальной точки  $\vec{x}_0$ , определить направление убывания функции и двигаться вдоль него в точку  $\vec{x}_1$ . В точке  $\vec{x}_1$  снова определить новое направление убывания функции и т.д. Общий алгоритм выбора траектории движения к минимуму определяется следующим образом:

$$\vec{x}_{i+1} = \vec{x}_i + \lambda \vec{a}_i, \quad (264)$$

где  $\vec{a}_i$  - направление движения на  $i$ -м шаге,  $\lambda$  - длина шага в заданном направлении.

На каждом шаге происходит сравнение значений функции в точках  $\vec{x}_i$  и  $\vec{x}_{i+1}$ . Если  $F(\vec{x}_{i+1}) < F(\vec{x}_i)$  то вычисляется следующая точка. В противном случае проверяется выполнение критерия окончания итерационного процесса

$$|F(\vec{x}_{i+1}) - F(\vec{x}_i)| < \varepsilon, \quad (265)$$

где  $\varepsilon$  - точность определения минимума функции. Если условие (265) не выполняется, то необходимо уменьшить длину шага  $\lambda$  и продолжить поиск экстремума.

Простейшей стратегией последовательного многомерного поиска экстремума является *метод покоординатного спуска* или метод Гаусса-

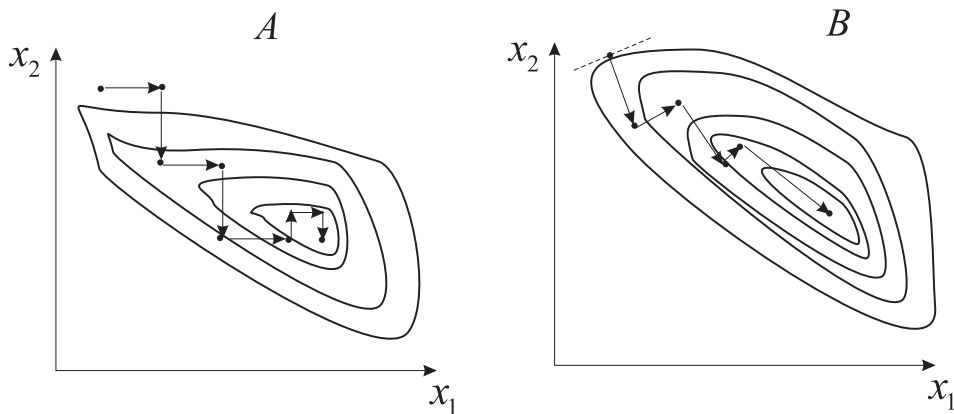


Рис. 48. Стратегия последовательного поиска экстремума. А -метод покоординатного спуска, В – метод наискорейшего спуска.

Зейделя (рис 48-А), в котором решение оптимизации сводится к последовательности одномерных задач оптимизации. Алгоритм заключается в следующем. Задается начальная точка  $(x_{1,0}, x_{2,0})$  произвольным образом. Переменная  $x_2$  фиксируется и делается шаг длиной  $\lambda$  в направлении убывания функции  $F$  вдоль координаты  $x_1$ . Затем фиксируется переменная  $x_1$  и делается шаг в направлении убывания функции  $F$  вдоль координаты  $x_2$ . Процедура продолжается до выполнения критерия останова (265).

Для оптимальной организации процедуры поиска экстремума необходимо задавать направление движения  $\vec{a}$  так, чтобы функция  $F$  убывала в выбранном направлении наиболее быстро. Направление наибольшего возрастания функции в точке  $x_1, x_2$  определяет вектор **градиента функции**:

$$\vec{\text{grad}}F(x_1, x_2) = \left\{ \frac{\partial F(x_1, x_2)}{\partial x_1}, \frac{\partial F(x_1, x_2)}{\partial x_2} \right\}. \quad (266)$$

Геометрически это направление задается вектором нормали к касательной линии уровня функции в точке  $x_1, x_2$ . Данное свойство широко используется в последовательных методах поиска экстремума. Если в качестве  $\vec{a}$  на  $i$ -м шаге выбрать направление антиградиента функции  $F$  в точке  $\vec{x}_i$ , то будет обеспечен наиболее быстрый спуск из данной точки к точке минимума функции. Алгоритм выбора точек будет задаваться

формулой:

$$\begin{aligned}x_{1,i+1} &= x_{1,i} - \lambda \left. \frac{\partial F(x_1, x_2)}{\partial x_1} \right|_{(x_{1,i}, x_{2,i})} \\x_{2,i+1} &= x_{2,i} - \lambda \left. \frac{\partial F(x_1, x_2)}{\partial x_2} \right|_{(x_{1,i}, x_{2,i})}\end{aligned}\quad (267)$$

Величина шага  $\lambda$  может быть постоянной или переменной величиной. Если на каждом шаге выбирать ее из условия:

$$\frac{\partial F(\lambda)}{\partial \lambda} = 0, \quad (268)$$

то шаг будет приводить к минимуму функции в выбранном направлении. Такая стратегия носит название **метод наискорейшего спуска**. Если функция  $F$  ограничена снизу и дифференцируема, то метод наискорейшего спуска всегда сходится к минимуму.

Необходимым условием эффективности градиентных методов оптимизации является котловинный рельеф функции  $F(\vec{x})$ . В случае овражного рельефа, т.е. отсутствии дифференцируемости функции в некоторых точках области определения, градиентные методы неприменимы.

## Линейное программирование

Задача оптимизации функции многих переменных  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , когда на область планирования накладываются ограничения произвольного вида  $g_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_j, j = \overline{1, k}$ , является в общем случае достаточно сложной, ее решение требует больших вычислительных затрат. Тем не менее, для класса линейных функций с линейными ограничениями на переменные, разработаны эффективные методы оптимизации, называемые **линейным программированием**.

**Определение.** *Задачей линейного программирования называется задача нахождения экстремума линейной функции*

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n, \quad (269)$$

при линейных ограничениях на переменные:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n & \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n & \leq b_2 \\ \dots, & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n & \leq b_m \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0 & \end{cases} \quad (270)$$

Функция  $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$  называется **целевой функцией** задачи линейного программирования. Ограничения на переменные вида  $x_i \geq 0$ , записанные в последней строке (270), называются естественными ограничениями задачи. Они накладываются исходя из физического смысла переменных задачи. Например, переменные, описывающие запасы и ресурсы, количество единиц произведенной продукции не могут принимать отрицательные значения.

**Определение.** *Условным множеством решений* называется множество решений, удовлетворяющих всем ограничениям задачи линейного программирования.

Любое решение из условного множества называется **допустимым решением**, а решение соответствующее экстремуму целевой функции, — **оптимальным решением**. Отметим, что оптимальное решение может быть и не единственным.

**Определение.** *Двойственными задачами* линейного программирования называются задача на максимум функции

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n, \quad (271)$$

при ограничениях на переменные:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n & \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n & \leq b_2 \\ \dots, & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n & \leq b_m \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0 & \end{cases} \quad (272)$$

и задача на минимум функции

$$G(y_1, y_2, \dots, y_m) = b_1y_1 + b_2y_2 + \dots + b_my_m, \quad (273)$$

при ограничениях на переменные:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \dots + a_{m1}y_m \geq c_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{m2}y_m \geq c_2 \\ \dots, \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \dots + a_{nm}y_n \geq c_m \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, \dots, y_m \geq 0 \end{cases} \quad (274)$$

Видно, что значения правых частей ограничений первой задачи, являются коэффициентами целевой функции второй и наоборот, а транспонирование матрицы коэффициентов переменных одной задачи, дает матрицу коэффициентов ограничений в двойственной к ней задаче.

Связь между двойственными задачами определяется следующей основной теоремой линейного программирования:

**Теорема.** Пусть  $F$  – целевая функция задачи линейного программирования на максимум, а  $G$  – целевая функция двойственной к ней задачи на минимум. Тогда задача на максимум функции  $F$  имеет решение тогда, и только тогда, когда имеет решение задача на минимум для функции  $G$ , причем  $F_{\max} = G_{\min}$ .

Из теоремы следует, что задачу в пространстве признаков большой размерности  $n$ , но с малым количеством существенных ограничений  $m$ , всегда можно свести к задаче в пространстве малой размерности, но с большим количеством ограничений и наоборот.

Методы решения задач линейного программирования основаны на следующих свойствах линейных функций.

- Для линейной целевой функций всегда существует только абсолютный экстремум (конечный или бесконечный).
- Гиперплоскости, соответствующие различным линиям уровня целевой функции, параллельны между собой.
- Область допустимых решений, удовлетворяющая линейным ограничениям, является выпуклой и имеет конечное число вершин.

На рисунке 49 проиллюстрирован *геометрический метод* решения задачи линейного программирования. Каждому из ограничений (270) задачи линейного программирования соответствует полуплоскость, граница которой задается условием  $a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{jn}x_n = b_j, j = \overline{1, m}$

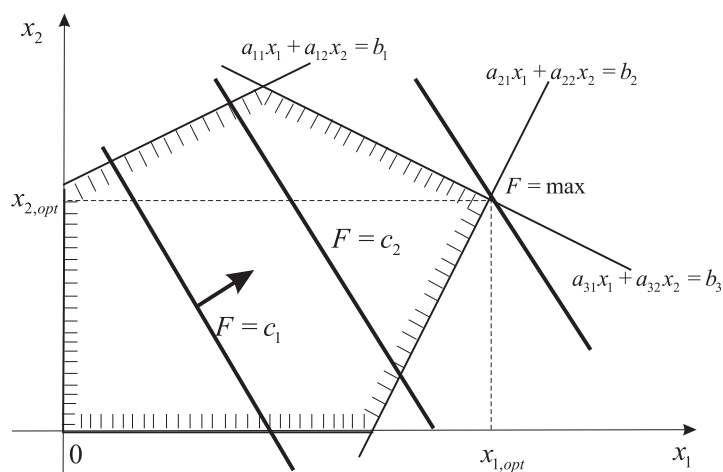


Рис. 49. Геометрический метод решения задачи линейного программирования

или  $x_i = 0, i = \overline{1, n}$ , а пересечение этих плоскостей определяет условное множество решений.

Любые точки  $x_1, x_2$ , находящиеся внутри области допустимых решений и удовлетворяющие условию  $F(x_1, x_2) = const$ , являются решениями, соответствующими одним и тем же значениям целевой функции. Решение задачи оптимизации заключается в том, чтобы найти такие точки в области допустимых решений, которые будут приводить к экстремуму целевой функции. Построив две различные линии уровня целевой функции  $F(x_1, x_2) = c_1$  и  $F(x_1, x_2) = c_2$  ( $c_2 > c_1$ ), можно определить направление возрастания целевой функции. При смещении линии уровня целевой функции параллельно себе самой в направлении возрастания, до тех пор, пока она будет находиться в области допустимых решений, решение будет приближаться к оптимальному (максимуму) и, наоборот, сдвиг в противоположном направлении будет приближать к минимуму. Нетрудно увидеть, что оптимальные решения целевой функции будут достигаться в вершинах области допустимых решений, либо на отрезке соединяющем соседние вершины, в случае параллельности линий уровня целевой функции границе области. В общем случае область допустимых значений может быть и неограниченной, в этом случае максимальное значение целевой функции будет бесконечно большим.

Геометрический метод решения задач линейного программирования удобно применять для случая двух независимых переменных. Если же переменных больше, то можно использовать общий метод решения, называемый **метод перебора вершин**. Идея его заключается в том, что оптимальное решение всегда достигается только в вершинах области до-



пустимых решений. Поэтому достаточно определить все ее вершины и сравнить значения целевой функции в полученных точках.

Каждая вершина является точкой пересечения каких либо  $n$  гиперплоскостей, определяемых ограничениями задачи. Общее количество точек, подозрительных на вершины, равно  $C_{n+m}^n$  – числу систем уравнений, полученных сочетаниями по  $n$  ограничений из общего количества  $(n+m)$  ограничений задачи. Необходимо найти эти точки, решая соответствующие системы уравнений, и выяснить, какие из них являются вершинами, а какие нет. Точка, являющаяся вершиной будет удовлетворять всем ограничениям задачи линейного программирования, а не только тем, из которых она получена.

Универсальным методом решения задач линейного программирования, эффективным для реализации на ЭВМ, является **симплекс-метод**. Симплекс (от лат. *simplex* – простой) это простейший выпуклый многогранник в пространстве заданного числа измерений. В вычислительной схеме симплекс-метода реализуется алгоритм, при котором, условное множество решений представляется в виде поверхности симплекса в пространстве размерности  $(n + m)$ . Затем, начиная с некоторого допустимого решения, обычно это вершина симплекса, соответствующая началу координат, осуществляются последовательные переходы от одного допустимого решения к другому (от одной вершины симплекса к соседней к ней) до тех пор, пока не будет найдена вершина, соответствующая оптимальному решению, т.е. любые переходы из нее будут приводить к уменьшению значения целевой функции.

Рассмотрим алгоритм симплекс-метода для случая  $b_i \geq 0$ . Переформулируем задачу линейного программирования следующим образом. Введем дополнительные переменные  $s_1, s_2, \dots, s_m$ , так, чтобы ограничения задачи задавались в виде равенств:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + s_1 & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + s_2 & = b_2 \\ \dots, & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + s_m & = b_m \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0 & \end{cases} \quad (275)$$

Целевая функция, при этом, будет иметь следующий вид:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, s_1, s_2, \dots, s_m) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n + 0s_1 + \dots + 0s_m. \quad (276)$$

По своему способу задания, можно увидеть, что значения переменных  $s_i$  неотрицательны:  $s_i \geq 0$ . Такие переменные будем называть базисными переменными, а все остальные – свободными. Если положить  $x_i = 0, i = \overline{1, n}$ , то получим решение (вершину симплекса), которое всегда будет допустимым:  $(\underbrace{0, 0, \dots, 0}_n, b_1, b_2, \dots, b_m)$  и соответствует значению целевой функции  $F(x_1, x_2, \dots, x_n, s_1, s_2, \dots, s_m) = 0$ . Дальнейшая процедура решения будет заключаться в переходе из полученной вершины симплекса в другую, увеличивающую значение целевой функции. Решать задачу удобно табличным методом. Для этого исходные данные представляют в виде симплекс-таблицы, строками которой являются коэффициенты существенных ограничений задачи, а последняя строка составлена из коэффициентов целевой функции:

$x_1$	$x_2$	$\dots$	$x_n$	$s_1$	$s_2$	$\dots$	$s_m$		базис
$a_{11}$	$a_{12}$	$\dots$	$a_{1n}$	1	0	$\dots$	0	$b_1$	$s_1$
$a_{21}$	$a_{22}$	$\dots$	$a_{2n}$	0	1	$\dots$	0	$b_2$	$s_2$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$a_{m1}$	$a_{m2}$	$\dots$	$a_{mn}$	0	0	$\dots$	1	$b_m$	$s_m$
$c_1$	$c_2$	$\dots$	$c_n$	0	0	$\dots$	0	F	

Элементы последней строки называются индикаторами симплекс-таблицы. При помощи линейных операций со строками, требуется получить нулевые или отрицательные значения всех индикаторов. В этом случае целевая функция достигнет своего максимума. Алгоритм преобразований состоит из следующих шагов.

1. Выбирается любой столбец с положительным индикатором. Пусть это будет  $j$ -й столбец.
2. В  $j$ -м столбце выбирается центральный элемент  $a_{ij}$  такой, что

$$\frac{b_i}{a_{ij}} \rightarrow \min_{i=\overline{1, m}}.$$

3. Делим все элементы  $i$ -й строки на  $a_{ij}$  так, чтобы на месте центрального элемента получить 1.
4. Линейными операциями со строками получаем в  $j$ -м столбце нулевые значения во всех строках, включая индикатор (в  $i$ -й строке остается 1).

5. Заменяем в колонке базисных элементов  $s_i$  на  $x_j$ .
6. Повторяем все действия с остальными положительными индикаторами симплекс-таблицы.

Полагая небазисные переменные равными нулю, а значения базисных определив из последнего столбца таблицы, находим максимальное значение целевой функции, причем в окончательном решении все введенные вспомогательные переменные  $s_i$  опускаем.

Если функция  $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$  является нелинейной, с произвольными ограничениями на область допустимых значений, то задача поиска экстремума существенно усложняется. В частности, оптимальное решение может достигаться во внутренних точках области допустимых значений. Для решения подобных задач разработаны различные методы нелинейного программирования (например, динамическое программирование), которые здесь не рассматриваются.

## Контрольные вопросы и задания

1. Определить геометрическим методом экстремальные значения целевой функции  $F(x_1, x_2) = x_1 - 2x_2$  при следующих ограничениях на переменные

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1 \leq 0, x_2 \leq 0 \end{cases} .$$

2. Найти методом перебора вершин минимум целевой функции  $F(x_1, x_2) = x_1 - 2x_2$  при следующих ограничениях на переменные

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 1 \leq 0 \\ x_1 - x_2 + 2 \leq 0 \\ -x_1 + 2x_2 + 2 \leq 0 \\ -x_1 + 3 \leq 0 \\ x_1 \leq 0, x_2 \leq 0 \end{cases} .$$

3. Сформулировать двойственную задачу к следующей: найти максимум целевой функции  $F(x_1, x_2) = 3x_1 + x_2$  при следующих ограничениях

на переменные

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \leq 2 \\ -x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1 + x_2 \leq 1 \\ 4x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1 \leq 0, x_2 \leq 0 \end{cases} .$$

4. Симплекс-методом найти максимальное значение целевой функции  $F(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3$  при следующих ограничениях на переменные:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 2 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 2 \\ x_1 \leq 0, x_2 \leq 0, x_3 \leq 0 \end{cases} .$$

5. Сформулировать и решить задачу линейного программирования. Требуется закупить удобрения двух видов. В единице удобрения первого вида содержится 3 единицы вещества А, 2 единицы вещества В и 1 единица вещества С. В единице удобрения второго вида содержится по 1 единице каждого из веществ А, В и С. На один гектар почвы требуется не менее 9 единиц вещества А, 8 единиц вещества В и 6 единиц вещества С. Составить наиболее экономичный план закупки удобрений (в расчете на 1 га.), если цена единицы удобрения первого вида составляет 3 ден. единицы, а единицы удобрения второго вида 2 ден. единицы.

# Лекция 18. Планирование эксперимента в условиях неоднородности

## Логические основы планирования эксперимента

Все данные, с которыми имеет дело исследователь, в конечном счете являются либо результатом прямого отбора или измерения каких-то экземпляров из исходного множества единиц этого же рода, либо результатом эксперимента. С формальной стороны между ними существует различие. Выборка представляет собой часть реально существующей исходной совокупности, а при проведении эксперимента вместо реальной совокупности создается совокупность повторений идентичных условий, в которых осуществляются измерения. Тем не менее, выборочное наблюдение и эксперимент имеют под собой общую вероятностно-статистическую основу. Действительно, результаты эксперимента можно рассматривать как выборку, но только из гипотетической исходной совокупности всевозможных результатов, которые могут быть получены в одних и тех же бесконечно повторяемых условиях опыта. Поэтому в дальнейшем будем объединять под понятием выборки оба этих случая.

Логическую основу планирования оптимального эксперимента в условиях неоднородности составляют процедуры:

- Рандомизация – случайный порядок реализации опытов, предназначенный для уменьшения случайной составляющей ошибки.
- Стратификация (разделение на блоки) – служащая для уменьшения влияния факторов, не принятых к рассмотрению.

Получение качественных оценок невозможно без создания благоприятных условий для проявления статистических закономерностей. При выборочном статистическом наблюдении под созданием благоприятных

условий понимается случайный отбор из исходной совокупности. При проведении эксперимента – случайная последовательность (рандомизация) проведения измерений. Поскольку в психологии каждого человека заложена тенденция отклоняться в своем выборе от чистой случайности, то получить случайную выборку можно только при соблюдении вполне определенных методик. Например, использование жребия, таблиц или датчиков случайных чисел. Конечная цель рандомизации выборки заключается в том, чтобы уменьшить случайную составляющую ошибки измерений. Если исходная генеральная совокупность является однородной, то использование датчика случайных чисел достаточно для того, чтобы корректно осуществить выбор объектов для последующего измерения. Причем однородность выборки является гарантией того, что случайная составляющая ошибки измерения будет минимальна.

В тех случаях, когда исходная совокупность объектов или условия проведения эксперимента являются неоднородными (различия в партиях лекарственных препаратов, в условиях лечения, квалификации персонала, используемой аппаратуре и т.п.), случайная составляющая ошибки измерения увеличивается вследствие влияния этих неоднородностей и возникает задача ее уменьшения. Решение этой задачи предъясвляет определенные требования к планированию экспериментальных измерений. Критерием качества в этом случае является критерий минимизации случайных ошибок. В зависимости от условий постановки и проведения эксперимента повышение точности оценок может осуществляться различными методами.

Общая логическая идея, положенная в основу методов, приводящих к уменьшению влияния неоднородностей и к повышению точности результатов, заключается в наложении ограничений. При выборочном наблюдении – ограничений отбора; при проведении эксперимента – ограниченный рандомизации.

Примером ограничения отбора является стратификация. Исходная неоднородная совокупность разбивается на отдельные группы (страты, слои, пласты) по какому-либо признаку. Например, при исследовании заболеваемости можно провести разбиение всех обследуемых на группы по возрасту, социальному положению и т.п. В этом случае общая дисперсия  $\sigma^2$ , которая характеризует величину случайной ошибки, может быть представлена в виде двух составляющих: межгрупповой  $\sigma_{out}^2$  и внутригрупповой  $\sigma_{in}^2$  дисперсий. Причем, при надлежащем выборе признака,

разбивающего на страты и соответствующем задании границ страт, зависимость от межгрупповых неоднородностей выборки можно существенно уменьшить, так что оценкой случайной ошибки может служить только внутригрупповая дисперсия. В биомедицинских исследованиях для построения исходной выборки достаточно широко используются следующие *виды отбора с ограничениями*:

- Систематический или механический отбор, при котором выборочная совокупность образуется путем измерения характеристик каждого  $i$ -го объекта исходной совокупности. Следует учитывать, что между членами выборки, полученной подобным образом, может существовать корреляционная связь, возникающая в следствие специфики подобного способа отбора.
- Серийный отбор, при котором оценка параметров исследуемой совокупности осуществляется путем измерения характеристик некоторой группы объектов. Это бывает удобно из соображений экономии, воспроизводства условий и т.п. Однако при серийном отборе важно правильно оценить размер единицы отбора, поскольку при объединении в крупные единицы также существуют благоприятные условия для возникновения положительной корреляции между элементарными единицами данной серии.

Наличие корреляционной связи между объектами при таких способах отбора приводит к тому, что случайная ошибка может быть занижена по сравнению с ошибкой обычного случайного отбора. Тем не менее применение систематического и серийного отбора, при их корректном использовании, позволяет получать достаточно эффективные оценки генеральной совокупности оптимальным образом.

Задание ограничений на рандомизацию, приводящее к уменьшению влияния неоднородностей, может осуществляться путем планирования *”парного” эксперимента*, заключающегося в обеспечении единообразия условий для каждой пары сравниваемых вариантов при проведении эксперимента. Полученный при этом ряд разностей измеренных значений также практически свободен от случайных ошибок, обусловленных неоднородностью условий. Действительно, при использовании одной партии препарата для проведения серии измерений в ”контроле”, а другой – для серии измерений в ”опыте”, всегда существует вероятность того, что в конечном результате присутствует составляющая ошибки за

счет случайных различий в партиях препаратов. Парные измерения существенно снижают величину этой ошибки.

Для исследования, в котором можно выделить две различные составляющие неоднородности условий, уменьшение их влияния может осуществляться методом *латинских квадратов*. В этом случае ограничением на рандомизацию является планирование измерений таким образом, чтобы каждое из них проводилось хотя бы один раз при всевозможных сочетаниях составляющих неоднородности условий. Например, исследование заключается в сравнении эффективности действия нескольких лекарственных препаратов  $A, B, C$  на базе нескольких больниц и категорий больных. Можно выделить две составляющие неоднородности: первая – различные больницы  $X_1, X_2, X_3$ , вторая – различные категории больных  $Y_1, Y_2, Y_3$ . Если один препарат применяется для всех категорий больных в одной больнице, а другой препарат только в другой, то различия могут возникнуть за счет больниц, а не за счет эффективности препарата. И наоборот, если в нескольких больницах наблюдается только одна часть категорий больных, а в других – другая, то различия могут быть обусловлены категориями больных. Уменьшить вклад двух составляющих неоднородности в случайную ошибку можно при следующем плане исследования:

	$X_1$	$X_2$	$X_3$
$Y_1$	A	B	C
$Y_2$	B	C	A
$Y_3$	C	A	B

Правильная оценка составляющих неоднородности (их число, степень влияния) существенно влияет на точность получаемых в исследовании результатов.

## **Понятие оптимального многофакторного планирования**

Результаты измерений в любом биомедицинском эксперименте, как правило, обладают некоторым рассеянием, мерой которого является дисперсия отклика системы. Для ее минимизации требуется рандомизация опытов, т.е. случайный выбор как последовательности проведения измерений, так и точек, в которых эти измерения производятся. В результате



чего все неконтролируемые воздействия на объект исследования будут учтены статистической обработкой.

Покажем, что точность определения функции отклика может быть существенно повышена также и за счет применения специальной схемы планирования эксперимента. Для этого рассмотрим пример со взвешиванием трех предметов  $A, B, C$  на аналитических весах. Чтобы определить их веса необходимо провести четыре опыта: 1-й опыт – определить нуль весов, результат обозначим через  $y_0$ , 2-й опыт – взвешивание предмета  $A$ , результатом будет являться величина  $y_A$  и т.д. Матрица плана такого эксперимента имеет вид.

№ опыта	A	B	C	Y
1	-1	-1	-1	$y_0$
2	+1	-1	-1	$y_A$
3	-1	+1	-1	$y_B$
4	-1	-1	+1	$y_C$

Здесь +1 в ячейке матрицы плана обозначает взвешивание соответствующего предмета в  $i$ -м опыте. Пусть точность каждого взвешивания одинакова и равна  $\sigma^2(y)$ . Вес предмета  $A$  вычисляется из результатов первого и второго измерения  $m_A = y_A - y_0$ , а точность результата при этом будет равна:

$$\sigma^2(m_A) = \sigma^2(y_A - y_0) = \sigma^2(y_A) + \sigma^2(y_0) = 2\sigma^2(y).$$

Рассмотрим другой план этого эксперимента, в котором также проводятся четыре опыта.

№ опыта	A	B	C	Y
1	+1	+1	+1	$y_0$
2	+1	-1	-1	$y_A$
3	+1	+1	-1	$y_B$
4	+1	-1	+1	$y_C$

В первом опыте определяется не нуль весов, а производится взвешивание всех трех предметов одновременно. Теперь вес предмета  $A$  определится следующим образом:

$$m_A = \frac{y_0 + y_A - y_B - y_C}{2},$$

а точность окончательного результата

$$\begin{aligned}\sigma^2(m_A) &= \sigma^2\left(\frac{y_0 + y_A - y_B - y_C}{2}\right) = \\ &= \frac{1}{4}[\sigma^2(y_0) + \sigma^2(y_A) + \sigma^2(y_B) + \sigma^2(y_C)] = \sigma^2(y).\end{aligned}$$

Аналогично определяется вес оставшихся предметов. Видно, что в результате такого планирования, при одном и том же числе опытов, точность окончательного результата оказалась в два раза выше. Уменьшить дисперсию удалось за счет применения многофакторной схемы проведения эксперимента, при которой вес предмета  $A$  определяется результатом всех четырех взвешиваний и в его определении задействованы веса всех предметов (факторов). В то время как первый план эксперимента построен по однофакторной схеме.

Такой подход к построению планов широко используется при оценке влияния факторов на выходную характеристику объекта исследования и построении уравнений множественной регрессии.

**Определение.** *Факторным экспериментом называется эксперимент по оценке влияния независимых факторов из их взаимодействий на функцию отклика системы*

Пусть изучается влияние трех факторов  $x_1, x_2, x_3$  на функцию отклика  $y$ . В предположении линейности взаимодействий, уравнение линейной регрессии будет иметь вид:

$$y = \beta_0 x_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 = \sum_{i=0}^3 \beta_i x_i. \quad (277)$$

В нем формально введен фактор  $x_0 \equiv 1$ , что никаким образом не скажется на получаемых результатах, но позволяет представить уравнение регрессии все результаты в более симметричном и обобщенном виде. Задача заключается в определении коэффициентов  $\beta_i$ . Для того, чтобы можно было определить каждый из коэффициентов при факторах  $x_i$  в уравнении линейной регрессии, необходимо провести измерения функции отклика при двух различных значениях каждого уровня фактора. Матрица плана эксперимента аналогична случаю со взвешиванием. Классическая схема однофакторного эксперимента будет задаваться следующей матрицей плана:

№ опыта	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$y$
1	+1	-1	-1	-1	$y_1$
2	+1	+1	-1	-1	$y_2$
3	+1	-1	+1	-1	$y_3$
4	+1	-1	-1	+1	$y_4$

Числами +1 и -1 в матрице плана будем обозначать значения (нижнее и верхнее) соответствующего входного фактора в  $i$ -м опыте. Значения +1 в первом столбце матрицы плана показывают, что фактор  $x_0$  не изменяется в ходе эксперимента. Соответствующая многофакторная схема планирования будет следующая:

№ опыта	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$y$
1	+1	+1	-1	-1	$y_1$
2	+1	-1	+1	-1	$y_2$
3	+1	-1	-1	+1	$y_3$
4	+1	+1	+1	+1	$y_4$

Коэффициенты  $\beta_i$  можно определить из решения следующей системы уравнений (в случае многофакторного планирования):

$$\begin{cases} \beta_0 + \beta_1 - \beta_2 - \beta_3 = y_1 \\ \beta_0 - \beta_1 + \beta_2 - \beta_3 = y_2 \\ \beta_0 - \beta_1 - \beta_2 + \beta_3 = y_3 \\ \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = y_4 \end{cases} \quad (278)$$

В целом, при изучении влияния  $n$  независимых факторов на функцию отклика системы, минимально необходимое число опытов  $N = n + 1$ . Очевидно, что одна и та же задача может быть решена с помощью различных планов многофакторного эксперимента. А при различных планах, как было показано выше, точность определения параметров модели будет различной.

Существуют специальные схемы планирования, называемые оптимальными планами факторных экспериментов.

**Определение.** *Оптимальным планом многофакторного эксперимента называется такой план, столбцы матрицы плана которого удовле-*

творяют условиям:

$$\begin{aligned} \sum_{u=1}^N x_{u,i} &= 0 && - \text{симметричности;} \\ \sum_{u=1}^N x_{u,i}^2 &= 0 && - \text{нормировки;} \\ \sum_{u=1}^N x_{u,i}x_{u,j} &= 0 && - \text{ортогональности;} \end{aligned} \quad (279)$$

где  $i, j$  – номер столбца,  $u$  – номер строки матрицы плана.

В случае оптимального планирования коэффициенты уравнения регрессии вычисляются наиболее просто:

$$\beta_i = \frac{1}{N} \sum_{u=1}^N x_{u,i} y_u, \quad (280)$$

а дисперсия коэффициентов  $\sigma^2(\beta_i)$  (точность определения коэффициентов факторной модели) связана с дисперсией функции отклика следующим образом:

$$\sigma^2(\beta_i) = \frac{\sigma^2(y)}{N}. \quad (281)$$

Видно, что точность определения коэффициентов регрессии в случае многофакторного планирования увеличивается по мере увеличения числа одновременно исследуемых факторов, в отличие от схемы классического планирования, при котором точность остается неизменной при любом числе факторов:

$$\sigma^2(\beta_i) = \frac{\sigma^2(y)}{2}. \quad (282)$$

Существуют различные критерии качества планирования многофакторных экспериментов, основанные на оценке дисперсии получаемых результатов.

- **D-оптимальное планирование.** Критерием оптимальности планирования является требование минимума общей дисперсии коэффициентов:

$$\vec{D} = \{\sigma^2(\beta_0), \sigma^2(\beta_1), \dots, \sigma^2(\beta_n)\} \rightarrow \min. \quad (283)$$

При помощи этого критерия оцениваются коэффициенты уравнения регрессии в целом, без учета влияния каждого фактора в отдельности. Величина  $D$ -критерия соотносится с площадью эллипсоида

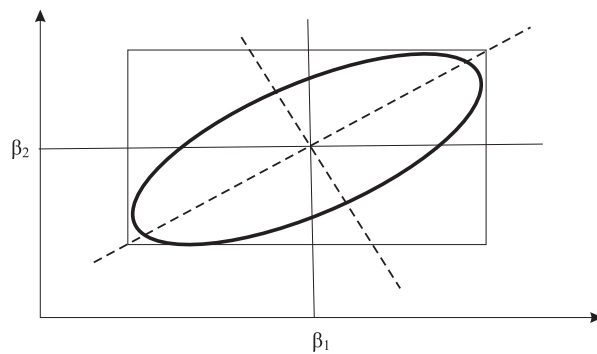


Рис. 50. Эллипсоид ошибок в случае двухфакторного эксперимента

ошибок (рис. 50) и пропорциональна величине  $\prod_i \sigma^2(\beta_i)$ . Поэтому может оказаться, что индивидуальная точность коэффициентов может быть существенно различной. Например, если  $\sigma^2(\beta_1) \rightarrow 0$ , то минимум  $D$ -критерия может достигаться при достаточно больших значениях  $\sigma^2(\beta_2)$  и наоборот.

- $A$ -оптимальное планирование. Критерием оптимальности планирования является требование минимальности средней дисперсии оценок коэффициентов (минимальности длин диагоналей прямоугольника, описанного вокруг эллипсоида ошибок). Такое требование соответствует более равномерному соотношению дисперсий оценок параметров.
- $E$ -оптимальное планирование. Критерий оптимальности – требование минимума максимальной оси эллипсоида ошибок.

Оптимальные планы удовлетворяющие условиям симметричности, ортогональности и нормировки (279), являются  $D$ ,  $A$ ,  $E$ -оптимальными. В общем случае, построение оптимального плана многофакторного эксперимента является достаточно сложной задачей, и для каждого конкретного набора существенных факторов и их взаимодействий требуется свой алгоритм построения матрицы плана, удовлетворяющей требованиям оптимальности.

## Оптимальные планы факторного эксперимента первого порядка

Основная идея оптимального планирования заключается в совместном анализе факторов воздействующих на систему. Такой подход, наря-

ду с уменьшением числа опытов, приводит к существенному выигрышу в точности получаемых оценок параметров. В зависимости от предположений относительно взаимодействия факторов и характера реакции объекта исследования на них, планы факторных экспериментов подразделяются на планы первого порядка и планы высших порядков.

**Определение.** *Полным факторным экспериментом первого порядка* называется эксперимент по оценке линейных эффектов действия  $k$  независимых факторов, а также по оценке всех их линейных взаимодействий (первого порядка) на функцию отклика системы, матрица плана которого удовлетворяет требованию оптимального планирования (279).

С учетом формального фактора  $x_0$ , функция отклика системы для полного факторного эксперимента может быть записана в виде:

$$y = \sum_{i=0}^k \beta_i x_i + \sum_{j,j=1}^k \beta_{ij} x_i x_j + \sum_{j,j,\dots,l=1}^k \beta_{ij\dots l} x_i x_j \dots x_l. \quad (284)$$

Взаимодействие факторов  $x_i$  и  $x_j$  необходимо учитывать, если эффект действия фактора  $x_i$  на функцию отклика  $y$  зависит от уровня, на котором находится фактор  $x_j$ , и наоборот. Под взаимодействиями первого порядка факторов понимаются всевозможные произведения факторов, причем, каждый фактор входит в каждое произведение в первой степени. Такие планы обозначаются как планы типа ПФЭ  $2^k$ , где  $k$  определяет количество учитываемых независимых факторов (без учета формального фактора  $x_0$ ), каждый из которых варьируется на двух уровнях в ходе эксперимента. Общее число коэффициентов  $\beta_i$  полной факторной модели первого порядка равняется  $2^k$ . Таким же будет и минимальное число опытов, которое необходимо произвести для их определения.

Рассмотрим алгоритм, который позволяет построить матрицу оптимального плана ПФЭ  $2^k$  с любым числом независимых факторов. Пусть для определенности имеется три независимых фактора  $x_1, x_2, x_3$ . Всего будет четыре различных взаимодействия первого порядка, которые в факторной модели будут представлены произведениями  $x_1 x_2, x_1 x_3, x_2 x_3, x_1 x_2 x_3$ . Таким образом, факторная модель ПФЭ  $2^3$  запишется в виде:

$$y = \beta_0 x_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_4 x_1 x_2 + \beta_5 x_1 x_3 + \beta_6 x_2 x_3 + \beta_7 x_1 x_2 x_3. \quad (285)$$

Вначале заполняются столбцы матрицы плана, соответствующие независимым факторам. Первый столбец матрицы плана, соответствующий

формальному фактору  $x_0$  всегда заполняется значениями  $+1$ . Столбец, соответствующий  $x_1$ , заполняется последовательно значениями  $-1$  и  $+1$  для всех строк матрицы плана. Столбец  $x_2$  заполняется последовательностями значений  $-1$ , а затем значениями  $+1$  для разнообразия значений первого фактора. Процедура повторяется для каждого из независимых факторов так, что столбец  $x_3$  заполняется сначала последовательностью четырех  $-1$ , а затем последовательностью четырех  $+1$ . Элементы столбцов, соответствующие взаимодействиям факторов, получаются путем перемножения значений столбцов, соответствующих независимым факторам. В последний столбец заносятся измеренные значения функции отклика в соответствующем опыте.

№ опыта	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_1x_2$	$x_1x_3$	$x_2x_3$	$x_1x_2x_3$	$y$
1	+1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	-1	$y_1$
2	+1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	+1	$y_2$
3	+1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	+1	$y_3$
4	+1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	-1	$y_4$
5	+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	$y_5$
6	+1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	-1	$y_6$
7	+1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	-1	$y_7$
8	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	$y_8$

Для любого другого числа независимых факторов матрица плана ПФЭ строится совершенно аналогично. Коэффициенты уравнения регрессии и их точность определяются по формулам (280) и (281).

Основным недостатком полного факторного эксперимента, при простоте его реализации, является резкое возрастание количества опытов при увеличении числа независимых факторов. В частности, при  $k = 10$ , число факторов и их взаимодействий (и соответственно опытов) возрастает до  $2^{10} = 1024$ . Причем, сюда входит и слагаемое вида  $x_1x_2 \dots x_{10}$ , учитывающее эффект взаимодействия между собой всех десяти факторов, что вряд ли оправдано и, как правило, трудно предметно интерпретируемо. Поэтому на первых этапах исследования ограничиваются линейными и парными взаимодействиями, которые обычно и дают основной вклад в функцию отклика. При этом план ПФЭ становится избыточным: количество коэффициентов факторной модели становится существенно меньше количества измерений, требующихся для проведения ПФЭ.

Более экономный план, обладающий оптимальными свойствами, мож-

но построить, опираясь на априорную информацию о свойствах объекта исследования. Эта информация представляет собой список переменных – независимых факторов и тех их взаимодействий, которые представляют интерес для дальнейшего исследования. В результате чего, уравнение регрессии многофакторного эксперимента будет иметь вид, задаваемый только списком существенных переменных, а качество получаемой модели будет зависеть от того, насколько верно учтены все существенные взаимодействия. При проведении ПФЭ эта проблема не возникает, поскольку учтены все возможные взаимодействия, а тем из них которые не влияют или мало влияют на функцию отклика будут соответствовать малые значения коэффициентов  $\beta_i$  факторной модели.

Для планирования оптимальных экспериментов, в которых список независимых переменных и их взаимодействий может быть уменьшен за счет априорной информации, используются планы, называемые **планами дробного факторного эксперимента**. Матрицы плана которых строятся на основе матриц плана ПФЭ и обозначаются ДФЭ  $2^{k-p}$ , где  $k$  – число независимых факторов,  $p$  – степень дробности плана.

Планы ДФЭ при  $p = 1, 2, 3$  и т.д. называются соответственно  $1/2$ ,  $1/4$ ,  $1/8$  – репликами плана ПФЭ  $2^k$ . В целом, матрица плана ДФЭ является некоторой случайной частью матрицы соответствующего плана ПФЭ, а выбор строк из исходной матрицы производится таким образом, чтобы столбцы полученной матрицы удовлетворяли требованиям симметричности, ортогональности и нормировки. Степень дробности плана определяется из условия:

$$N = 2^{k-p} > d + 1, \quad (286)$$

где  $d$  – количество существенных факторов, т.е количество независимых факторов и учитываемых взаимодействий.

К сожалению не существует универсального способа построения планов ДФЭ, удовлетворяющих требованиям оптимальности. Поэтому на практике, каждый раз требуется проверять столбцы построенной матрицы на выполнение условий симметричности, нормировки и ортогональности. Рассмотрим на примере один из алгоритмов построения матрицы плана ДФЭ  $2^{k-p}$ .

1. Определяется список существенных факторов. Пусть это будут следующие факторы и взаимодействия:  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_1x_2, x_2x_3, x_2x_4$ .



Соответствующее уравнение регрессии будет иметь вид:

$$y = \beta_0 x_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_4 x_4 + \beta_5 x_1 x_2 + \beta_6 x_2 x_3 + \beta_7 x_2 x_4.$$

2. Определяется степень дробности плана. В нашем примере  $k = 4$ ,  $d = 7$ . Поэтому, условию  $2^{4-p} > 7 + 1$  удовлетворяет  $p = 1$ . Следовательно, для планирования можно воспользоваться  $1/2$ -репликой плана ПФЭ  $2^4$ , т.е. планом ДФЭ  $2^{4-1}$ .
3. Из общего числа  $k$  независимых факторов выбирают  $m = k - p = 4 - 1 = 3$  ведущих факторов (пусть это будут факторы  $x_1, x_2, x_3$ ), для которых строится матрица плана ПФЭ  $2^3$ . Для  $p$  оставшихся независимых факторов в качестве программы их изменения в ходе эксперимента задаются **генерационные соотношения** – произведения каких-либо комбинаций ведущих факторов. Всего будет  $p$  генерационных соотношений. В нашем примере для независимого фактора  $x_4$  можно предложить два варианта генерационных соотношений:  $x_4 = x_1 x_3$  или  $x_4 = x_1 x_2 x_3$ .

Для всех оставшихся существенных взаимодействий факторов программа изменения задается обычным образом: как произведения соответствующих столбцов независимых факторов.

Пусть, для определенности, выбрано генерационное соотношение  $x_4 = x_1 x_3$ . Тогда матрица плана ДФЭ будет иметь вид.

№ опыта	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4 = x_1 x_3$	$x_1 x_2$	$x_2 x_3$	$x_2 x_4$	$y$
1	+1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	-1	$y_1$
2	+1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	+1	$y_2$
3	+1	-1	+1	-1	+1	+1	-1	+1	$y_3$
4	+1	+1	+1	-1	-1	-1	-1	-1	$y_4$
5	+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	$y_5$
6	+1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	-1	$y_6$
7	+1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	-1	$y_7$
8	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	$y_8$

Выбор генерационных соотношений достаточно произволен, однако, нельзя в качестве их использовать те произведения ведущих факторов, которые имеются в списке существенных. Так как в этом случае в матрице плана будут присутствовать полностью идентичные

столбцы и, следовательно, идентичная программа изменения в ходе эксперимента. Это обозначает, что будет невозможно отдельно оценить влияние соответствующих факторов и взаимодействий.

4. Проводится проверка полученной реплики плана на оптимальность. Если условия оптимальности выполняются для всех столбцов матрицы плана, то его можно использовать для проведения эксперимента. Если же нет, то необходимо выбрать другое генерационное соотношение и повторить всю процедуру снова. В случае, когда ни одно из генерационных соотношений не будет давать желаемого результата, следует уменьшить степень дробности плана.

Процедура построения плана ДФЭ связанная с проверкой условий оптимальности, довольно трудоемкая, поэтому хотелось бы упростить процедуру проверки пригодности реплик плана. Формальный алгоритм, позволяющий это сделать, носит название *метод определяющих контрастов*. Он включает в себя следующие действия:

1. Задание определяющих контрастов. Определяющий контраст (ОК) получается из генерационного соотношения и имеет вид:  $1 =$  произведение левой и правой частей генерационного соотношения. Количество ОК равно числу генерационных соотношений.
2. Построение обобщенного определяющего контраста (ООК). ООК представляет собой равенство, содержащее всевозможные результаты почленного перемножения правых и левых частей исходных ОК с учетом правила:

$$x_i^{2k} = 1, \quad x_i^{2k+1} = x_i. \quad (287)$$

ООК содержит информацию о системе смешивания переменных, входящих в факторную модель. Он позволяет определить, какие взаимодействия факторов при выбранном виде генерационных соотношений изменяются одинаковым образом, т.е. им соответствуют одинаковые столбцы матрицы плана.

3. Выявление системы смешивания. ООК поочередно умножается на каждую переменную из списка существенных с учетом правила (287). Всего получается  $d + 1$  соотношение, каждое из которых содержит произведения факторов и их различных взаимодействий. Действия переменных, входящих в определенное равенство смешаны между

собой, т.е. изменяются одинаковым образом в плане эксперимента. Таким образом, требуется выяснить, не содержит ли какое-либо равенство хотя бы двух переменных из списка существенных. Если содержит, то данный план непригоден и должен быть изменен либо за счет изменения генерационных соотношений, либо за счет изменения дробности плана.

Рассмотрим пример на проверку пригодности плана методом ОК. Пусть список существенных переменных содержит следующие факторы и их взаимодействия:  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_1x_2, x_4x_5$ . Нетрудно убедиться, что для факторной регрессионной модели

$$y = \beta_0x_0 + \beta_1x_1 + \beta_2x_2 + \beta_3x_3 + \beta_4x_4 + \beta_5x_5 + \beta_6x_1x_2 + \beta_7x_4x_5$$

можно попытаться построить оптимальный план ДФЭ  $2^{5-2}$ . Выберем в качестве ведущих факторы  $x_1, x_2, x_3$ . Для оставшихся независимых факторов зададим следующие генерационные соотношения:  $x_4 = x_2x_3, x_5 = x_1x_3$ . Тогда соответствующие ОК будут иметь вид:

$$1 = x_2x_3x_4, \quad 1 = x_1x_3x_5.$$

Обобщенный определяющий контраст:

$$1 = x_2x_3x_4 = x_1x_3x_5 = x_1x_2x_3^2x_4x_5$$

или с учетом правила (287)

$$1 = x_2x_3x_4 = x_1x_3x_5 = x_1x_2x_4x_5.$$

Выясним систему смешивания для существенных факторов и взаимодействий:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1x_2x_3x_4 = x_3x_5 = x_2x_4x_5, \\ x_2 &= x_3x_4 = x_1x_2x_3x_5 = x_1x_4x_5, \\ x_3 &= x_2x_4 = x_1x_5 = x_1x_2x_3x_4x_5, \\ x_4 &= x_2x_3 = x_1x_3x_4x_5 = x_2x_5, \\ x_5 &= x_2x_3x_4x_5 = x_1x_3 = x_1x_2x_4, \\ x_1x_2 &= x_1x_3x_4 = x_2x_3x_5 = x_4x_5, \\ x_4x_5 &= x_2x_3x_5 = x_1x_3x_4 = x_1x_2. \end{aligned}$$

Видно, что план, построенный с использованием предложенных генерационных соотношений, использовать нельзя, т.к. в последних двух соотношениях для выяснения системы смешивания присутствуют по два существенных взаимодействия факторов  $x_1x_2$  и  $x_4x_5$ . В плане эксперимента они будут изменяться одинаковым образом, поэтому нельзя будет разделить обусловленные ими эффекты. Поэтому необходимо изменить генерационные соотношения.

Опишем алгоритм действий по *реализации плана факторного эксперимента* первого порядка.

1. Выбрать центр плана и шаг варьирования каждого из факторов. Под центром плана понимается базовый уровень, от которого производится отсчет значений фактора. Как правило, это нормальные значения входных факторов (соответствует уровню  $-1$  в матрице плана). Шаг варьирования зависит от величины случайных помех и степени нелинейности функции отклика: чем выше уровень помех, тем больше должен быть шаг варьирования; чем больше нелинейность функции отклика, тем он меньше. Величина фактора=центр плана+шаг варьирования, соответствует уровню  $+1$  в матрице плана.
2. Задать число серий измерений  $m$ , соответствующих плану эксперимента, (внутри каждой серии порядок опытов задается случайным образом). Провести измерения функции отклика и оценить дисперсию функции отклика в каждой серии измерений.

№ опыта	1	2	3	...	m
1	$y_{1,1}$	$y_{2,1}$	$y_{3,1}$	...	$y_{m,1}$
2	$y_{1,2}$	$y_{2,2}$	$y_{3,2}$	...	$y_{m,2}$
...	...	...	...	...	...
N	$y_{1,N}$	$y_{2,N}$	$y_{3,N}$	...	$y_{m,N}$
$S_N^2$	$S_1^2$	$S_2^2$	$S_3^2$	...	$S_m^2$

3. Провести проверку условий воспроизводимости эксперимента. Она заключается в проверке предположения об однородности дисперсий в различных сериях опытов (например, по критерию Кочрена). Если гипотеза об однородности дисперсий принимается, то определяют

усредненную дисперсию по всем сериям опытов:

$$S_{cp}^2 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m S_i^2. \quad (288)$$

В случае отвержении гипотезы однородности дисперсий необходимо выяснить причину нестабильности результатов измерений. Если она связана с ошибками в постановке эксперимента, грубыми промахами и т.п., эксперимент следует повторить. Если же причина нестабильности связана с внутренними свойствами объекта исследования, то нужно соответствующим образом изменить схему планирования эксперимента.

4. Оценить значимость коэффициентов факторной регрессионной модели. По формулам (280), (281) определяют коэффициенты  $\beta_i$  и их дисперсию  $S_{\beta}^2$ . На уровне значимости  $\alpha$  рассчитывают величину:

$$\Delta\beta = \pm t_{\alpha, N(m-1)} S_{\beta}^2, \quad (289)$$

где  $t_{\alpha, N(m-1)}$  – коэффициент Стьюдента для уровня значимости  $\alpha$  и числа степеней свободы равного  $N(m-1)$ .

Если  $|\Delta\beta| < |\beta_i|$ , то коэффициент  $\beta_i$  значимо отличается от нуля, т.е. соответствующий фактор влияет на функцию отклика системы, в противном случае соответствующими слагаемыми в уравнении факторной модели можно пренебречь.

5. Провести интерпретацию полученных данных в терминологии предметной области. В частности, по знаку соответствующего коэффициента регрессии определяется характер связи фактора и функции отклика (положительная или отрицательная), а по его величине оценивается сила связи.

В тех случаях, когда применение планов первого порядка не позволяет построить адекватную факторную регрессионную модель изучаемой системы или заведомо известно, что объект исследования обладает существенно нелинейными свойствами, используют планы факторного эксперимента высших порядков. По сравнению с планами первого порядка, планы высших порядков являются более сложными по структуре, имеют большее число точек в спектре плана и уровней варьирования каждого фактора. Например, для определения вида квадратичной зависимости

требуется варьирование каждого из факторов по крайней мере на трех уровнях.

Существует большое количество различных планов высших порядков, оптимальных для тех или иных постановок задач исследования. Условия реализации и описание матриц планов, формулы для расчета оценок коэффициентов нелинейной факторной модели приводятся в соответствующих справочных руководствах по планированию факторных экспериментов.

## Планирование отсеивающих экспериментов

Рассматриваемые ранее методы планирования основывались на том, что в программу исследования включены все независимые факторы и их взаимодействия, ответственные за протекание изучаемого процесса, т.е. предполагается, что исключается случай, когда какая либо весьма существенная переменная не включена в рассмотрение. В реальной ситуации при изучении сложных процессов всегда существует вероятность, что такое предположение неверно. Поэтому, на этапе планирования, было бы целесообразно в программу исследования включать максимально большое число переменных, часть которых при дальнейшем анализе могла бы быть отсеяна как малосущественная. Такие предварительные исследования по выявлению множества несущественных факторов и взаимодействий носят название *отсеивающих экспериментов*. Основная проблема при планировании отсеивающих экспериментов заключается в том, какой фактор считать значимым, а какой незначимым. Во многом принятие решения зависит от мнения самого исследователя, анализа априорной информации, экспертных оценок и т.п.

Формализованный подход к выделению значимых факторов реализуется с помощью *метода случайного баланса*. В этом методе постулируется, что если эффекты, ответственные за протекание процесса, расположить в порядке убывания вклада, вносимого ими суммарную дисперсию, то получится затухающая кривая (рис. 51). По оси абсцисс расположены факторы, упорядоченные по величине их вклада в суммарную дисперсию, а по оси ординат разности дисперсий, оцененных при учете и без учета  $i$ -го фактора. В левой части полученной диаграммы будут располагаться значимые эффекты, а в правой эффекты, относимые к шумовому полю. Причем, если затухание вклада происходит линей-

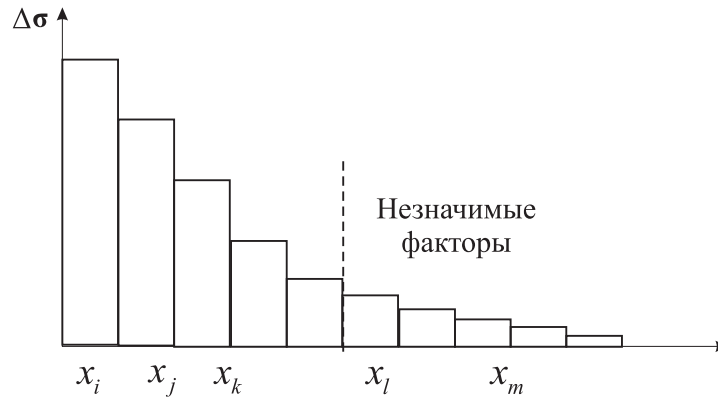


Рис. 51. Метод случайного баланса. Вклад факторов в суммарную дисперсию

но, то все рассматриваемые эффекты являются значимыми и исключать их из рассмотрения нельзя. Граница между значимыми и незначимыми факторами достаточно условна и определяется как условиями решаемой задачи, так и ограничениями на количество значимых факторов.

В рамках отсеивающего эксперимента можно провести оценку некоторого подмножества наименее значимых факторов. Пусть изучается  $k$  эффектов. Опишем их линейной моделью

$$y = \sum_{i=0}^k \beta_i x_i + \varepsilon, \quad (290)$$

где  $\varepsilon$  – величина случайной ошибки. Будем считать, что из  $k$  исходных факторов,  $(k - l)$  значимые эффекты и  $l$  – шумовые. Поскольку заранее неизвестно, какие эффекты значимы, а какие нет, то нужно рассмотреть  $C_k^l$  комбинаций всевозможных сочетаний факторов. Модель, соответствующая какому-либо набору значимых факторов, имеет вид:

$$y = \sum_{i=0}^{k-l} \beta_i x_i + a, \quad (291)$$

где  $a = \sum_{j=1}^l \beta_j x_j + \varepsilon$  – ошибка, связанная с подмножеством незначимых факторов, а величина остаточной дисперсии:

$$\sigma^2(a) = \sum_{j=1}^l \beta_j^2 \sigma^2(x_j) + \sigma^2(\varepsilon). \quad (292)$$

Для каждой комбинации значимых и шумовых эффектов нужно оценить остаточную дисперсию  $\sigma^2(a)$  и выбрать вариант с наименьшей диспер-

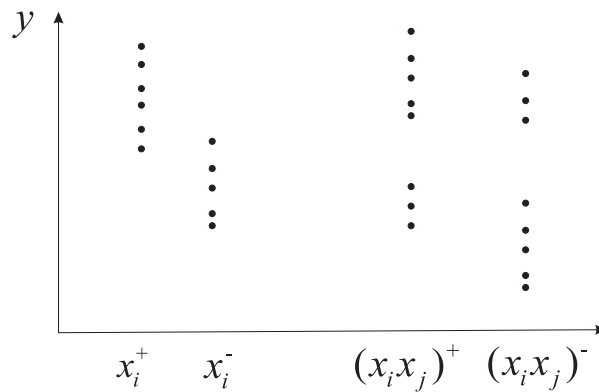


Рис. 52. Диаграммы рассеяния

сией. Он будет соответствовать наилучшему разделению на значимые и шумовые эффекты.

Нетрудно понять, что такой подход к проведению отсеивающих экспериментов приводит к достаточно большому объему измерений. Уменьшить число вариантов перебора можно с помощью исследования диаграмм рассеяния. Это во многом эвристическая процедура, заключающаяся в анализе зрительного образа измеренных значений функции отклика. По каждому анализируемому фактору строится **диаграмма рассеяния**, точки которой образуют два подмножества, соответствующие значениям функции отклика при нижнем и верхнем значении уровня рассматриваемого фактора (рис. 52). Причем, действие каждого фактора рассматривается вне зависимости от действия остальных факторов. Значимые эффекты выделяются зрительно на основе сравнения медиан (или других характеристик) выборок. В частности, видно, что фактор  $x_i$  является значимым фактором, т.к. распределение значений функции отклика различается для положительного и отрицательного значений уровня фактора.

Выделение парных взаимодействий можно осуществлять на тех же диаграммах рассеяния. При большом значении некоторого эффекта взаимодействия  $x_i x_j$  будут резко выделяться группы точек как на уровне  $(x_i x_j)^+$ , так и на уровне  $(x_i x_j)^-$ , т.е. в случаях, когда рассматриваемые факторы имеют либо одинаковые знаки  $(x_i^- x_j^-)$ ,  $(x_i^+ x_j^+)$ , либо противоположные  $(x_i^- x_j^+)$ ,  $(x_i^+ x_j^-)$ . В этом случае диаграммы рассеяния имеют достаточно симметричный зеркальный вид.

Рассмотрим еще один тип планирования экспериментальных исследований, который не укладывается в рамки предыдущей модели отсеиваю-



щих экспериментов. Пусть требуется среди множества всех препаратов найти подмножество биологически активных (антиканцерогенных, мутагенных и т.п.) – отсеять препараты не обладающие интересующим нас свойством. Другими словами, речь идет о выборе оптимального соотношения между переменными, которыми задается организация процесса отсеивания в рамках ограничений на ресурсы, а не о выборе оптимальных планов в пространстве независимых переменных.

Действительно, при планировании такого исследования, наблюдаются две тенденции: во-первых, хочется уменьшить риск неверного отсеивания и как можно более полно испытать каждый препарат, что при ограниченных ресурсах неизбежно приведет к уменьшению числа обследуемых препаратов и, следовательно, к увеличению риска не включить в программу исследования потенциально интересные препараты. Во-вторых, хочется испытать максимальное число препаратов, что ведет к уменьшению ресурсов, затрачиваемых на каждый препарат и, следовательно, увеличению риска пропустить эффективные препараты из-за ошибок испытания.

Найти разумный компромисс между этими тенденциями позволяет двухступенчатая схема планирования исследования (Даннет, Девис, 1961, 1963): на первом этапе производится грубое отсеивание; на втором этапе проводится детальное исследование препаратов, отобранных на первом этапе. При этом появляется возможность оптимально соотнести затраты отдельных этапов работы.

Пусть  $v$  – средняя стоимость препарата,  $a$  – стоимость первичного испытания препарата в одном опыте,  $b$  – полная стоимость исследования препарата, отобранного для детального исследования на второй стадии,  $q$  – априорная вероятность существования активного препарата.

На первом этапе исследования действительно эффективный препарат будет отобран для дальнейшего исследования с вероятностью  $q(1 - \alpha)$ , а неэффективный препарат будет ошибочно признан эффективным (т.е. принятым к исследованию на втором этапе) с вероятностью  $(1 - q)\beta$ . Здесь  $\alpha$  и  $\beta$  – вероятности ошибок первого и второго рода, соответственно. С учетом этого средняя стоимость полного исследования одного препарата будет равна

$$v + an + b[q(1 - \alpha) + (1 - q)\beta],$$

где  $n$  – количество опытов, необходимых для первичного исследования одного препарата.

Пусть  $S$  – сумма средств, отпущенных на исследование. Очевидно, что общее количество препаратов  $M$ , которое можно исследовать, равняется:

$$M = \frac{S}{v + an + b[q(1 - \alpha) + (1 - q)\beta]}.$$

Из них на первом этапе будет признано эффективными и будет направлено на повторное испытание:

$$m = M[q(1 - \alpha) + (1 - q)\beta].$$

Число обнаруженных действительно эффективных препаратов составит:

$$L = \frac{Sq(1 - \alpha)}{v + an + b[q(1 - \alpha) + (1 - q)\beta]}.$$

Дальнейшее планирование будет направлено на нахождение экстремума функции  $L$  по параметрам, допускающим оптимизацию с учетом заданного качества исследования (цены ошибок первого и второго рода, затрат на первичное и детальное исследование препаратов и т.п.).

Приведенная модель служит примером формализованного подхода к оптимизации экспериментального исследования и планированию оптимальных соотношений между переменными, задающими организацию этого исследования.

## Контрольные вопросы и задания

1. Запишите факторную модель и составьте план полного факторного эксперимента первого порядка  $2^4$ .

2. В результате реализации плана ПФЭ  $2^3$  получены следующие значения  $y_i$  отклика системы: 4, 6, 4, 10, 2, 6, 14, 8. Определите коэффициенты факторной модели и дайте качественную характеристику реакции системы на воздействие независимых факторов и их взаимодействий.

3. Постройте оптимальный план дробного факторного эксперимента первого порядка для следующих существенных факторов и их взаимодействий:  $x_1, x_2, x_3, x_4x_5, x_1x_2, x_2, x_4x_5$ .

## Рекомендуемая литература

1. Винер, Н. Кибернетика, или управление и связь в животном и машине / Н. Винер. – М.: Наука, 1983.
2. Теория информации. Курс лекций [Электронный ресурс] : Учебное пособие для вузов / Белов В.М., Новиков С.Н., Солонская О.И. - М. : Горячая линия - Телеком, 2012.  
- <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785991202374.html>
3. Теоретические основы информатики [Электронный ресурс] : Учебник для вузов / Стариченко Б.Е. - 3-е изд. перераб. и доп. - М. : Горячая линия - Телеком, 2016.  
- <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785991204620.html>.
4. Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечеткие системы [Электронный ресурс] / Д. Рутковская, М. Пилиньский, Л. Рутковский. ; Пер. с польского И.Д. Рудинского. - 2-е изд., стереотип. - М. : Горячая линия - Телеком, 2012.  
- <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785991203203.html>
5. Принятие решений в условиях неопределенности [Электронный ресурс] / Демидова Л.А., Кираковский В.В., Пылькин А.Н. - М. : Горячая линия - Телеком, 2012.  
- <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785991202244.html>
6. Основы построения интеллектуальных систем [Электронный ресурс] : учеб. пособ./ Г.В. Рыбина. - М. : Финансы и статистика, 2014.  
- <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785279034123.html>

Учебное издание

Василий Александрович Фокин

# ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ КИБЕРНЕТИКИ

Курс лекций

Учебное пособие

издано в электронном виде в авторской редакции

Издательство СибГМУ  
634050, г. Томск, пр. Ленина, 107  
тел 8(3822)51-41-53  
E-mail: [otd.redactor@ssmu.ru](mailto:otd.redactor@ssmu.ru)